

**FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO**



# **Projeto otimizado de transformadores de média frequência para conversores de potência isolados**

**Mário Humberto da Silva Naia Ferreira**

Mestrado Integrado em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

Orientador: Rui Esteves Araújo

30 de Outubro de 2015



A Dissertação intitulada

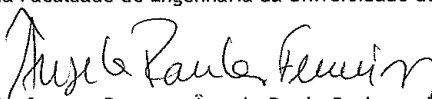
“Projeto Otimizado de Transformadores de Média Frequência para Conversores  
de Potência Isolados”

foi aprovada em provas realizadas em 20-10-2015


o júri



Presidente Professor Doutor Carlos João Rodrigues Costa Ramos  
Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Eletrotécnica e de Computadores  
da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

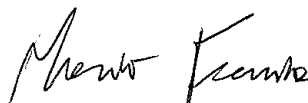


Professora Doutora Ângela Paula Barbosa de Silva Ferreira  
Professor Adjunto do Departamento de Eletrotecnia da Escola Superior de  
Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Bragança



Professor Doutor Rui Manuel Esteves Araújo  
Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Eletrotécnica e de Computadores  
da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

O autor declara que a presente dissertação (ou relatório de projeto) é da sua exclusiva autoria e foi escrita sem qualquer apoio externo não explicitamente autorizado. Os resultados, ideias, parágrafos, ou outros extratos tomados de ou inspirados em trabalhos de outros autores, e demais referências bibliográficas usadas, são corretamente citados.



Autor - Mário Humberto da Silva Naia Ferreira

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto



# Resumo

A construção de transformadores requer ter em conta vários parâmetros no que se refere ao perfil desejado de transformador bem como o projeto no qual o transformador vai ser inserido. Com vários parâmetros de entrada e por vezes métodos de desenho relativamente complexos de serem calculados torna-se importante a automatização deste processo, bem como a possibilidade de escolha entre vários métodos de desenho. Usando técnicas de otimização baseadas nos multiplicadores de Lagrange, esses métodos de desenhos são implementados e os resultados podem posteriormente ser usados para simulação de modelos de transformadores. Três casos de estudos foram testados, um baseado num conversor Cuk, outro num conversor Buck e por fim um conversor Flyback. Uma etapa inicial de compreensão do que está envolvido no desenho de um transformador a nível de caracterização das várias perdas foi estudada, para posterior implementação de algoritmos que faziam uso desses mesmos modelos de perdas. Foi conseguida uma interface intuitiva, bem como a implementação de dois métodos de desenho que acabaram por ser validados.



# Abstract

The construction of transformers requires taking into account various parameters in relation to the transformer as well as the desired profile design in which the transformer is to be inserted. With various input parameters and sometimes drawing methods relatively complex to be calculated becomes important to automate this process as well as the possibility to choose between various drawing methods. Using optimization techniques based on Lagrange multipliers, these drawings are implemented methods and the results can then be used for simulation of transformer models. Three case studies were tested, one based on a Cuk converter, one based in a Buck converter and the last one based on a Flyback converter. The early stages of understanding what is involved in designing a transformer at the level of characterization of the various losses was studied for further implementation of algorithms that used these same models of losses. It has achieved an intuitive interface and the implementation of two design methods which were eventually validated.





# Agradecimentos

Queria agradecer ao meus pais todo o apoio que me deram nesta jornada e que me continuam a dar e por tornarem possível todo este caminho, Obrigado. Queria também agradecer á minha família por me apoiarem sempre que necessário.

Gostaria de agradecer ao meu orientador Professor Rui Esteves Araújo por todo o apoio dado, pelo interesse no desenvolvimento da tese e pela motivação que me incutiu para o desenvolvimento da tese.

Uma palavra de agradecimento aos meus amigos que, de uma forma direta ou indireta, me acompanharam nesta fase académica da minha vida. Queria também agradecer a todas as pessoas que me ajudaram de alguma maneira ao longo da minha vida.

Queria também agradecer ao Pedro Silva por me ter ajudado durante toda a tese.

Mário Humberto da Silva Naia Ferreira



*“To improve is to change,  
to be perfect is to change often”*

Winston Churchill



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Apresentação do problema . . . . .	1
1.2	Objetivos . . . . .	1
1.3	Motivação . . . . .	2
1.4	Estrutura do documento . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Estado da Arte</b>	<b>3</b>
2.1	Conceitos de eletrônica de potência . . . . .	3
2.2	Conceitos de eletromagnetismo . . . . .	8
2.3	Modelação do transformador . . . . .	16
2.3.1	Indutância de fugas . . . . .	19
2.3.2	Perdas no núcleo . . . . .	20
2.3.3	Efeito pelicular . . . . .	27
2.3.4	Calibre dos condutores . . . . .	27
2.3.5	Efeito de proximidade . . . . .	28
2.3.6	Fluxo de fugas . . . . .	31
2.3.7	Perdas nas camadas . . . . .	34
2.3.8	Enrolamentos intervalados . . . . .	38
2.4	Tipos de circuitos magnéticos . . . . .	38
2.4.1	Filtro Indutor . . . . .	38
2.4.2	Indutor AC . . . . .	40
2.4.3	Transformador . . . . .	41
2.4.4	Indutor acoplado . . . . .	42
2.4.5	Transformador Flyback . . . . .	43
2.5	Ferramenta de desenho de aparelhos magnéticos . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Caracterização multifísica de um transformador de média frequência</b>	<b>45</b>
3.1	Introdução . . . . .	45
3.1.1	Perdas núcleo . . . . .	45
3.1.2	Perdas enrolamentos . . . . .	48
3.1.3	Modelo térmico . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Desenvolvimento e Implementação da ferramenta</b>	<b>51</b>
4.1	Introdução . . . . .	51
4.2	Métodos de desenho de transformadores . . . . .	51
4.2.1	Algoritmo iterativo . . . . .	51
4.2.2	Algoritmo analítico . . . . .	57
4.3	Métodos de Otimização . . . . .	60

4.4	Modelos de transformadores com Parâmetros concentrados . . . . .	65
4.4.1	Modelo de transformador básico . . . . .	68
4.4.2	Modelo de transformador com indutância de magnetização . . . . .	69
4.4.3	Transformador com três indutâncias . . . . .	70
4.4.4	Modelo de transformador referido ao primário . . . . .	71
4.4.5	Modelo de transformador referido ao primário alternativo . . . . .	72
4.4.6	Modelo de transformador com duas indutâncias e resistência de bobina . . . . .	72
4.4.7	Modelo de transformador com indutância mútua . . . . .	73
4.5	Arquitetura da ferramenta de projeto . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>79</b>
5.1	Casos de estudo . . . . .	79
5.2	Resultados com ferramenta desenvolvida . . . . .	79
5.2.1	Conversor Cuk . . . . .	79
5.2.2	Conversor Foward . . . . .	81
5.2.3	Conversor flyback . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Conclusões e Trabalho Futuro</b>	<b>87</b>
6.1	Introdução . . . . .	87
6.2	Satisfação dos Objectivos . . . . .	87
6.3	Trabalho Futuro . . . . .	87
	<b>Referências</b>	<b>89</b>

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama básico de um sistema de conversão controlado, modificado a partir de [1]	3
2.2	Perda de potência no conversor relacionada com a sua eficiência, modificado a partir de [1]	4
2.3	Tipo de aparelhos usados em circuitos de potência, modificado a partir de [1]	4
2.4	Circuito com comutador, modificado a partir de [1]	5
2.5	Tensão á saída do comutador, modificado a partir de [1]	5
2.6	Adição de um filtro passa-baixo para remoção de harmónicos, modificado a partir de [1]	6
2.7	Sistema de controlo para regular saída, modificado a partir de [1]	6
2.8	Formas de onda nos terminais do semiconductor do circuito da figura 2.4, modificado a partir de [1]	7
2.9	Forma de onda na bobina, modificado a partir de [1]	8
2.10	Ilustração da lei de Faraday, modificado a partir de [1]	9
2.11	Imagem ilustrativa da lei de Lenz, modificado a partir de [1]	9
2.12	Exemplo demonstrativo da lei de Amperè onde vemos o caminho fechado $l_m$ e a corrente que passa pelo interior do mesmo, modificado a partir de [1]	10
2.13	Característica B-H do núcleo do transformador, modificado a partir de [1]	11
2.14	Exemplo da geometria de um indutor, modificado a partir de [1]	12
2.15	Elemento contendo fluxo magnético, modificado a partir de [1]	13
2.16	O circuito equivalente do elemento da figura 2.15 que contém fluxo magnético, modificado a partir de [1]	13
2.17	Leis de Kirchhoff aplicadas a circuitos magnéticos, modificado a partir de [1]	14
2.18	Indutor com abertura, modificado a partir de [1]	14
2.19	Circuito equivalente do indutor da figura 2.18, modificado a partir de [1]	14
2.20	Efeito da abertura no circuito magnético modificado a partir de [1]	15
2.21	Transformador de 2 enrolamentos, modificado a partir de [1]	16
2.22	Circuito equivalente magnético do transformador da figura 2.21, modificado a partir de [1]	16
2.23	Modelo do transformador com indutância de magnetização, modificado a partir de [1]	18
2.24	Indutância de fugas num transformador de 2 enrolamentos, modificado a partir de [1]	19
2.25	Circuito equivalente do transformador da figura 2.24 considerando agora as indutâncias de fugas, modificado a partir de [1]	19
2.26	Correntes de Foucault num núcleo de ferro, modificado a partir de [1]	21
2.27	Perdas no núcleo em materiais de ferrite, para altas frequências, modificado a partir de [1]	22
2.28	Enrolamento equivalente que modela perdas de cobre, modificado a partir de [1]	22

2.29 Núcleo E . . . . .	23
2.30 Núcleo em duplo E . . . . .	23
2.31 Núcleo U . . . . .	24
2.32 Núcleo em duplo U . . . . .	24
2.33 Núcleo "Pot core" . . . . .	24
2.34 Núcleo EP . . . . .	25
2.35 Núcleo PQ . . . . .	25
2.36 Núcleo toroidal . . . . .	26
2.37 Núcleo planar, retirado de [2] . . . . .	26
2.38 Na imagem da direita vemos o fluxo induzido pela corrente, enquanto que na imagem da direita vemos as correntes de <i>Foucault</i> resultantes pela oposição á mesma corrente, modificado a partir de [1] . . . . .	27
2.39 Imagem que ilustra efeito de proximidade, modificado a partir de [1] . . . . .	28
2.40 Transformador de 2 enrolamentos, modificado a partir de [1] . . . . .	29
2.41 Típica distribuição de fluxo, modificado a partir de [1] . . . . .	31
2.42 Análise do fluxo de fugas usando lei de Amperè no transformador, modificado a partir de [1] . . . . .	31
2.43 Valores de MMF por camada, modificado a partir de [1] . . . . .	32
2.44 Condutores redondos e quadrados com a mesma secção . . . . .	33
2.45 Na imagem da esquerda temos os condutores quadrados juntos enquanto que na direita estes foram esticados para a largura da janela, modificado a partir de [1] . . . . .	33
2.46 Perda de potência é determinada para uma camada uniforme com campos $H(0)$ e $H(h)$ aplicados á superfície, modificado a partir de [1] . . . . .	34
2.47 Perdas de cobre devido ao efeito de proximidade como função $\phi$ de $e$ do rácio $m$ , modificado a partir de [1] . . . . .	35
2.48 Perdas de cobre por camada relativamente às perdas DC numa camada com uma certa grossura, modificado a partir de [1] . . . . .	36
2.49 Exemplo de transformador com 2 enrolamentos, cada um com $M$ camadas, modi- ficado a partir de [1] . . . . .	36
2.50 Diagrama de força magneto-motriz para transformador com enrolamentos interca- lados, modificado a partir de [1] . . . . .	37
2.51 Transformador de 2 enrolamentos parcialmente intercalado com vários valores de $m$ , modificado a partir de [1] . . . . .	37
2.52 Conversor abaixador com filtro indutor, modificado a partir de [1] . . . . .	39
2.53 Estrutura de filtro indutor, modificado a partir de [1] . . . . .	39
2.54 Circuito magnético equivalente de um filtro indutor, modificado a partir de [1] . . . . .	39
2.55 Curva B-H do filtro indutor, modificado a partir de [1] . . . . .	40
2.56 Circuito do tanque ressonante LC, modificado a partir de [1] . . . . .	40
2.57 Curva B-H do indutor AC, modificado a partir de [1] . . . . .	41
2.58 Circuito equivalente de um transformador convencional, modificado a partir de [1] . . . . .	41
2.59 Curva B-H do transformador, modificado a partir de [1] . . . . .	42
2.60 Circuito equivalente de acoplamento de filtros indutores de dois conversores foward, modificado a partir de [1] . . . . .	42
2.61 Curva B-H do indutor acoplado, modificado a partir de [1] . . . . .	43
2.62 Circuito equivalente do transformador <i>flyback</i> , modificado a partir de [1] . . . . .	43
2.63 Curva B-H de operação do conversor <i>flyback</i> , modificado a partir de [1] . . . . .	44
3.1 Resistência térmica de núcleos de ferrites, [3] . . . . .	50



4.1	Diagrama principal do algoritmo de desenho de transformadores . . . . .	52
4.2	Transformador com k saídas . . . . .	53
4.3	Selecionando a densidade de fluxo ótima a partir das perdas de enrolamentos e núcleo, retirado de [4] . . . . .	55
4.4	Diagrama de algoritmo alternativo de desenho de transformadores . . . . .	57
4.5	Parábola com vários níveis de contorno e 2 linhas de restrições. Retirado de [5] .	61
4.6	Vista mais próxima dos níveis de contorno e restrições. Retirado de [5] . . . . .	61
4.7	Solução através de algoritmo de Karmarkar, retirado de [6] . . . . .	62
4.8	Algoritmo SQP da função Rosenbrock com restrição, retirado de [7] . . . . .	64
4.9	Modelo de um transformador real . . . . .	65
4.10	Representação esquemática de um transformador com enrolamento primário e secundário . . . . .	67
4.11	Modelo de transformador ideal . . . . .	67
4.12	Modelo de transformador básico . . . . .	68
4.13	Modelo de transformador com indutância de magnetização . . . . .	69
4.14	Modelo de transformador com três indutâncias . . . . .	70
4.15	Modelo de transformador referido ao primário . . . . .	71
4.16	Modelo de transformador referido ao primário (modelo alternativo) . . . . .	72
4.17	Modelo de transformador com duas indutâncias e resistência de bobina . . . . .	72
4.18	Modelo de transformador com indutância mútua . . . . .	73
4.19	Diagrama da interface desenvolvida . . . . .	74
4.20	Diagrama da interface Input desenvolvida . . . . .	75
4.21	Interface "Transformer data input" . . . . .	75
4.22	Diagrama da interface Data desenvolvida . . . . .	76
4.23	Interface "Data Input" . . . . .	76
4.24	Interface "Design" . . . . .	77
4.25	Interface "Design by Barrios" . . . . .	77
4.26	Interface "Simulation" . . . . .	78
4.27	Diagrama <i>simulink</i> funcional, modelo de três indutâncias . . . . .	78
5.1	Conversor <i>Cuk</i> , retirado de [8] . . . . .	79
5.2	Conversor <i>Buck</i> com ponte completa, retirado de [8] . . . . .	81
5.3	Conversor <i>Flyback</i> . . . . .	82
5.4	Conversor <i>Flyback</i> com malha snubber . . . . .	83
5.5	Perdas por enrolamentos, retirado de [9] . . . . .	83
5.6	Perdas do conversor, retirado de [9] . . . . .	84
5.7	Transformador construído . . . . .	84
5.8	Comando do <i>mosfet</i> (a) e tensão nos terminais do mesmo (b). . . . .	85
5.9	Tensão no primário (a) e no secundário (b). . . . .	85
5.10	Tensão na carga . . . . .	86



# Lista de Tabelas

2.1	Potências para vários aparelhos eletrônicos [8] . . . . .	7
2.2	Símbolos e unidades de comparação usadas no estudo de transformadores [8] . .	11
2.3	Densidade de fluxo e respetivo campo magnético [8] . . . . .	11
2.4	Tipos de núcleo, valores de densidade de fluxo, perdas e aplicações [8] . . . . .	21
2.5	Valores exemplos de AWG . . . . .	27
3.1	Expressões de perdas do núcleo para diferentes métodos [10] . . . . .	48
5.1	Características para desenho de transformador para conversor <i>Cuk</i> . . . . .	80
5.2	Resultados para desenho de transformador para conversor <i>Cuk</i> , com algoritmo iterativo . . . . .	80
5.3	Resultados para desenho de transformador para conversor <i>Cuk</i> , com algoritmo analítico . . . . .	80
5.4	Características para desenho de transformador para conversor <i>Buck</i> . . . . .	81
5.5	Resultados para desenho de transformador para conversor <i>Buck</i> , com algoritmo iterativo . . . . .	82





# Abreviaturas e Símbolos

AC	Alternate Current
$A_c$	Área da espira
$A_w$	Área de janela
B	Densidade de fluxo magnético
$C_m$	Coefficiente de perdas do material magnético
D	Duty cycle
DC	Direct Current
EMI	Electro magnetic Interference
$f_o$	Frequência de corte
$h$	Diâmetro do condutor
H	Campo magnético
I	Corrente
$I_m$	Corrente de magnetização
$I_{rms}$	Corrente eficaz
$k_{gfe}$	Constante geométrica do núcleo
$k_\mu$	Coefficiente de enchimento
L	Indutância
$L_m$	Indutância de magnetização
$l_w$	Altura da janela
MLT	Comprimento médio por espira
MMF	Magnetomotive Force
n	Número de espiras
P	Potência
$P_{cu}$	Perdas cobre (perdas nos enrolamentos)
$P_{fe}$	Perdas no ferro (perdas no núcleo)
$P_{in}$	Potência de entrada
$P_{loss}$	Potência de perdas
$P_{out}$	Potência de saída
$P_{tot}$	Perdas totais
$P_v$	Perdas do núcleo
QP	Quadratic programming
R	Resistencia
$R_{dc}$	Resistência DC
$R_{th}$	Resistência térmica
$r_{0p}$	Raio do enrolamento primário
$r_{0s}$	Raio do enrolamento secundário
SQP	Sequential quadratic programming
$T_s$	Período do sinal de comando do semiconductor
V	Componente DC da tensão
x	Coefficiente de perdas do material magnético
y	Coefficiente de perdas do material magnético

# Capítulo 1

## Introdução

Este documento tem como objetivo demonstrar o trabalho feito na dissertação. Neste capítulo problema em questão será apresentado 1.1, bem como a motivação 1.3 para o mesmo. Serão discutidos os objetivos do projeto 1.2 e a estrutura do documento 1.4. Neste documento pretende demonstrar o estudo feito sobre o transformador e o seu comportamento, do que existe no que respeita a métodos de desenhos de transformadores e procura também descrever a ferramenta criada assim como o processo de validação da mesma.

### 1.1 Apresentação do problema

Atualmente a eficiência é a palavra que está na ordem do dia. Esta eficiência é atingida através de um estudo do processo em causa. Neste caso, o processo/produto em causa é o transformador, e o caminho para obter melhor eficiência é através da otimização do mesmo. A otimização passa por diminuir algumas das perdas que existem nos transformadores. Neste caso concreto o transformador é de média frequência. Este tipo de problemas também levou a Google[11] a abrir um concurso para construção de um inversor de potência na caixa mais pequena possível por forma a trabalhar com segurança e ocupar pouco espaço. Também nas energias renováveis a eficiência é particularmente importante, sendo que começa a ser um assunto importante [12] particularmente na interface de aparelhos em redes de baixa tensão.

### 1.2 Objetivos

O objetivo fundamental deste trabalho é realizar um estudo profundo sobre métodos de otimização de transformadores, com foco na média frequência, e também testar vários métodos através da aplicação prática num problema real. Pretende-se compreender o processo envolvido no desenho de transformadores bem como todas as suas nuances, para que assim se possa aplicar esse mesmo conhecimento na criação de projetos de potência (conversores) envolvendo transformadores. Para isto foi desenvolvida uma ferramenta que graças a uma interface intuitiva permite que o processo de desenho dos mesmos seja relativamente simples.

### 1.3 Motivação

O meu principal interesse dentro da área de engenharia eletrotécnica é a eletrônica (principalmente de potência) e energias renováveis. Este projeto acaba por ser motivante para mim em ambas as áreas visto que os transformadores de potência estão cada vez mais presentes em redes elétricas. Os transformadores de média-alta frequência são uma solução aos transformadores convencionais.

### 1.4 Estrutura do documento

O documento encontra-se dividido em 6 grandes capítulos, a introdução [1](#) que como o próprio nome indica introduz o tema e o trabalho assim como a motivação para o fazer. O capítulo [2](#) é uma revisão da literatura ou estado da arte onde faço uma revisão de conceitos chave para o estudo do tema, bem como análise de algumas soluções existentes no mercado. Começando por introduzir o tema de eletrônica de potência e revisão de alguns conceitos base para o entendimento desta, é feito também uma pesquisa sobre as várias características do transformador, e como podem influenciar no desenho do mesmo.

No capítulo [3](#) é feita a caracterização multi-física do transformador enquanto sistema sujeito a perdas. Apesar deste tema ter semelhanças aos temas do capítulo [2](#), a grande diferença é que neste capítulo são cuidadosamente analisados três parâmetros importantes no que respeita ao processo de desenho de transformadores, e estes são as perdas no núcleo, nos enrolamentos e a resistência térmica, sendo portanto as características que mais irão influenciar o desenho do transformador.

O capítulo [4](#) aborda o desenvolvimento da ferramenta desenvolvida de desenho de transformadores assim como algumas das suas funcionalidades e dos algoritmos de desenho implementados. Neste capítulo serão abordados dois algoritmos de desenho de transformadores, um iterativo e outro analítico. Serão também apresentados e explicados os métodos computacionais que permitem a resolução de sistemas de equações provenientes dos dois algoritmos. Será também apresentada um conjunto de modelos equivalentes de transformadores que posteriormente serão usados na ferramenta desenvolvida, e que permitem visualizar as formas de onda do transformador. Será apresentada a ferramenta e as diferentes possibilidades da mesma.

O capítulo [5](#) serve para análise dos resultados obtidos com a ferramenta desenvolvida, e também para uma breve discussão dos mesmos. Por fim, no capítulo [6](#) temos as conclusões e previsão de trabalho futuro. É importante saber o que foi feito, e o que ainda falta fazer. Serão apresentadas neste capítulo várias possibilidades de continuação do projeto.



## Capítulo 2

# Estado da Arte

Neste capítulo serão apresentadas todas as questões essenciais para o desenho de transformadores, bem como revistas as principais matérias teóricas necessárias ao projeto de transformadores. Em seguida apresentamos alguns conceitos importantes sobre eletrônica de potência 2.1, conceitos de eletromagnetismo 2.2 para posteriormente falarmos sobre a modelação das perdas e fenómenos que ocorrem no transformador 2.3 , bem como do tipo de dispositivos magnéticos que precisa destes transformadores 2.4 e por fim falaremos do que já existe disponível para o desenho de transformadores 2.5.

### 2.1 Conceitos de eletrónica de potência

Convém introduzir alguns conceitos fulcrais para tratar o problema considerado da eficiência dos transformadores e ao mesmo tempo discutir partes importantes da eletrónica de potência. A eletrónica de potência tem como grande objetivo processar sinais elétricos usando dispositivos eletrónicos [8]. Na conversão de potência (figura 2.1) temos os elementos responsáveis por esse mesmo processo que são os conversores, que por sua vez podem ser dc-dc, dc-ac, ac-dc ou ac-ac (ciclo-conversor).

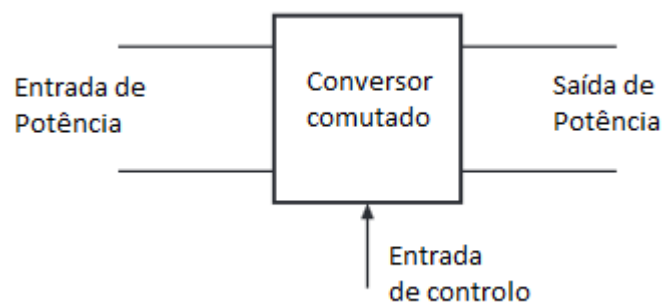


Figura 2.1: Diagrama básico de um sistema de conversão controlado, modificado a partir de [1]

A eficiência é definida pela equação  $\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}}$ . Já a perda de potência no conversor é definida pela equação  $P_{loss} = P_{in} - P_{out} = P_{out} \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right)$ .

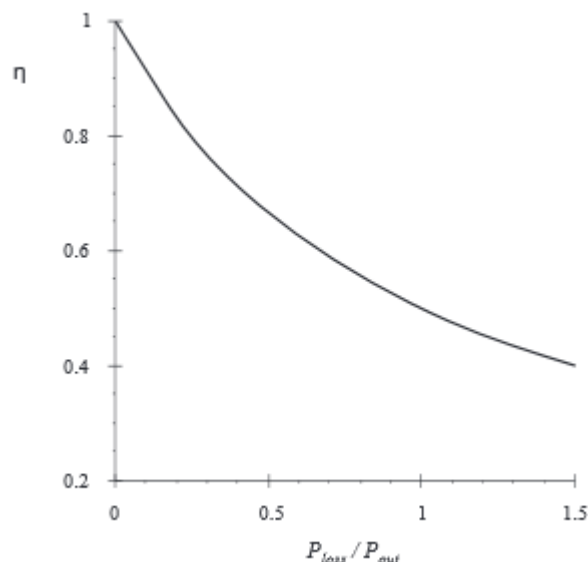


Figura 2.2: Perda de potência no conversor relacionada com a sua eficiência, modificado a partir de [1]

Num conversor com eficiência de 50%,  $P_{loss}$  é dissipada por elementos do conversor e isto é igual a  $P_{out}$  (figura 2.2). Esta potência é convertida em calor que tem que ser removido do conversor. Se potência de saída é alta também serão as perdas. Requer sistema de arrefecimento (pode ser caro). Altas temperaturas obrigam os componentes eletrônicos a trabalharem a altas temperaturas e isto reduz a fiabilidade da mistura. Aumentar a eficiência é a chave para obter altas potências de saída. Se  $\eta = 90\%$  então  $P_{loss} = 11\%$ . A eficiência é um parâmetro fundamental para caracterizar o desempenho do conversor.

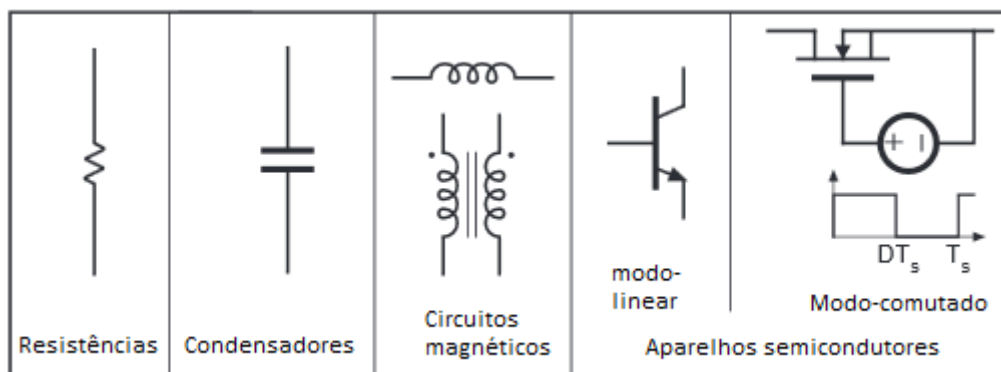


Figura 2.3: Tipo de aparelhos usados em circuitos de potência, modificado a partir de [1]

Como pode ser visto na figura 2.3 existem vários tipos de elementos usados na implementação de conversores eletrônicos de potência. Um dos elementos mais usados é o semicondutor. Este dispositivo comuta o seu estado entre aberto e fechado. Quando um semicondutor opera no estado off a corrente é zero logo dissipa potência nula. Quando se encontra no estado on (saturado) a queda de tensão é desprezável logo a dissipação de potência será tendencialmente nula.

Elementos capacitivos, indutivos e de modo comutado servem para fazer conversores de alta eficiência.

Tendo como base o circuito representado na figura 2.4 podemos observar que o semicondutor permite á carga (representado na figura por R) receber ou não o sinal da fonte. Este interruptor eletrónico atua com um duty-cycle, isto é, o tempo em que o aparelho está ON em comparação com o tempo total de trabalho, é representado pela letra D, varia de  $0 \leq D \leq 1$ .

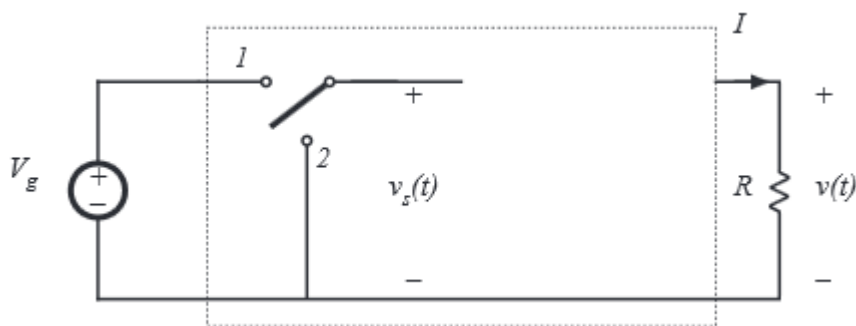


Figura 2.4: Circuito com comutador, modificado a partir de [1]

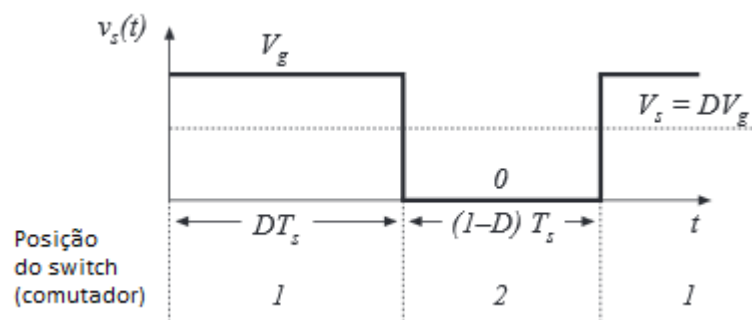


Figura 2.5: Tensão á saída do comutador, modificado a partir de [1]

As comutações dos interruptores eletrónicos mudam a componente DC do sinal de tensão aplicado à carga (figura 2.5). Decorre da análise da série de *Fourier* que o primeiro termo à frequência nula é:

$$V_s = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} v_s(t) dt = DV_g \quad (2.1)$$

A comutação origina harmônicos indesejáveis múltiplos da frequência de comutação. Podemos usar filtro passa baixo para remover harmônicos. Assim, introduzindo um filtro passa-baixo (figura 2.6) com uma frequência de corte  $f_o$  suficiente pequena para remover os harmônicos do sinal de tensão.

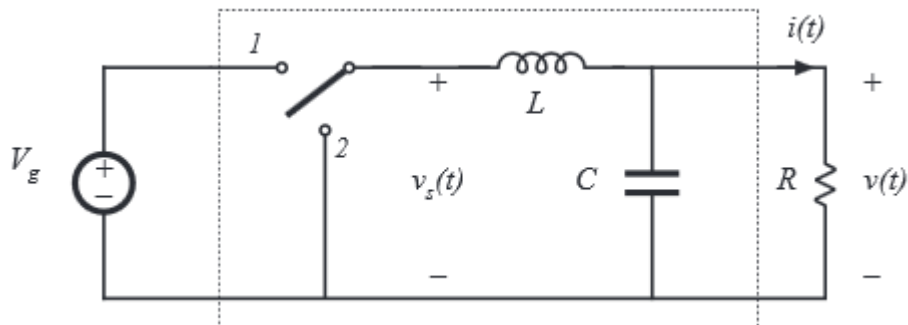


Figura 2.6: Adição de um filtro passa-baixo para remoção de harmônicos, modificado a partir de [1]

Introduzindo um sistema de controle em malha fechada (figura 2.7), podemos manipular o  $D$  da potência (*duty cycle*) por forma a controlar a tensão de saída do conversor.

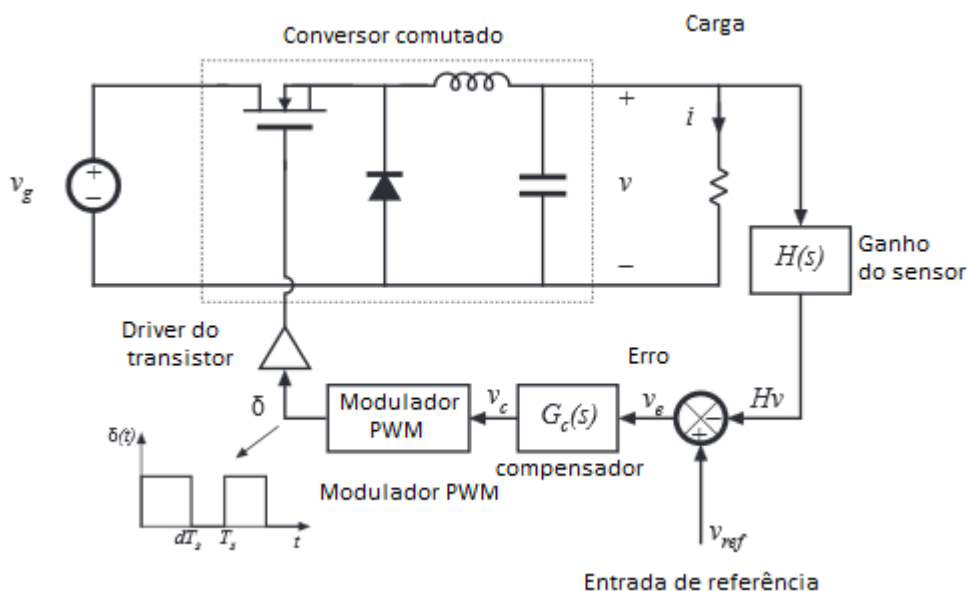


Figura 2.7: Sistema de controlo para regular saída, modificado a partir de [1]

Na tabela seguinte são apresentados vários equipamentos que usam eletrónica de potência e o tipo de potências a que trabalham.

Tabela 2.1: Potências para vários aparelhos eletrônicos [8]

Potência (Watts)	Aparelho
<1	Baterias de equipamento portátil
100-1000	Computadores
1000-1000000	Acionamento de motores
1000M	Interfaces para linhas de transmissão

Verificando a figura 2.8 também podemos ter uma noção das tensões nos terminais dos interruptores eletrônicos.

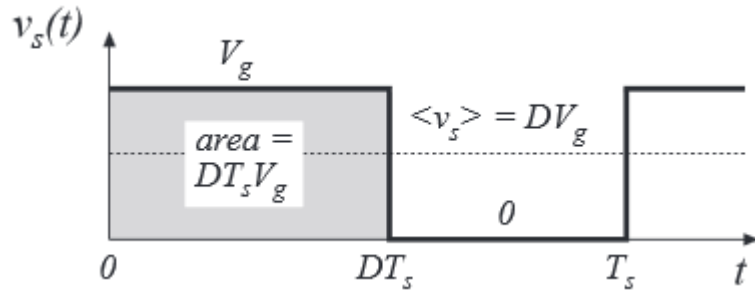


Figura 2.8: Formas de onda nos terminais do semiconductor do circuito da figura 2.4, modificado a partir de [1]

$$V = \langle V_s \rangle = DV_g \quad (2.2)$$

Neste caso (figura 2.8) a maneira de controlar a potência de saída é através de uma malha fechada, que informa o sistema da tensão desejada, sendo que o sistema ajusta o *duty-cycle* para esse propósito. Convém também referir que é impossível filtrar completamente as componentes harmônicas originadas pela comutação. Assim, designando o sinal  $v(t)$ , temos que poderá ser separado no seu termo DC e na sua componente de ondulação,  $V(t) = V + v_{ripple}(t)$  onde  $V$  é a componente DC e  $v_{ripple}(t)$  é a componente AC, efeito associado à tensão de saída pode ser alterada pelo dimensionamento apropriado do condensador de saída do conversor (figura 2.6).

Em equilíbrio a variação da mudança na corrente da bobine durante um período de comutação (figura 2.9) dever ser 0 logo  $0 = \int_0^{T_s} V_L(t) dt$ .

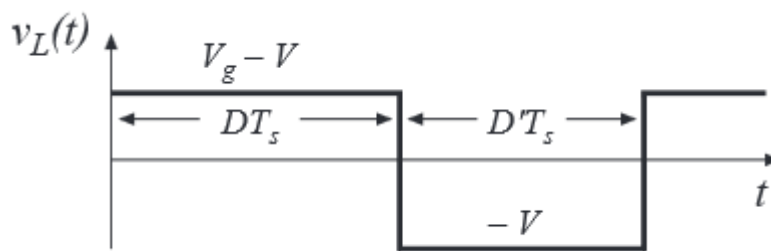


Figura 2.9: Forma de onda na bobina, modificado a partir de [1]

## 2.2 Conceitos de eletromagnetismo

Nesta secção importa sobretudo relembrar alguns conceitos do magnetismo e da eletricidade. A força magneto-motriz ou potencial escalar entre 2 pontos  $x_1$  e  $x_2$  é definida pela letra  $F$  e é representada pela seguinte equação.

$$F = \int_{x_1}^{x_2} H \cdot dl \quad (2.3)$$

Onde  $H$  representa o campo magnético e  $dl$  o elemento infinitesimal de linha. Isto resulta na componente  $H$  na direção  $dl$ . Se  $dl=L$  então  $F=HL$ . Também temos que  $V=EL$  onde  $E$  é o campo elétrico e  $L$  é o comprimento e  $V$  a tensão. Se  $dA=A$  então  $\Phi = B \cdot A$ , com  $\Phi$  a representar o fluxo e  $A$  a representar a secção.

A lei de Faraday relaciona a tensão induzida num enrolamento com o fluxo total que passa pelo interior desse enrolamento (figura 2.10).

$$v(t) = \frac{d\Phi}{dt} \quad (2.4)$$

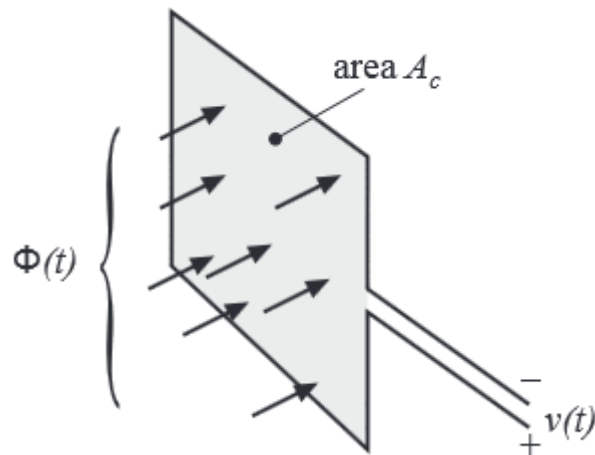


Figura 2.10: Ilustração da lei de Faraday, modificado a partir de [1]

$$v(t) = A_c \frac{dB(t)}{dt} \quad (2.5)$$

onde  $A_c$  simboliza a área da espira e  $B(t)$  simboliza a densidade de fluxo magnético variante no tempo.

A lei de *Lenz* diz que tensão  $v(t)$  induzida por mudança no fluxo  $\Phi(t)$  é da polaridade que tende para guiar a corrente pelo enrolamento para interagir com mudança de fluxo (figura 2.11).

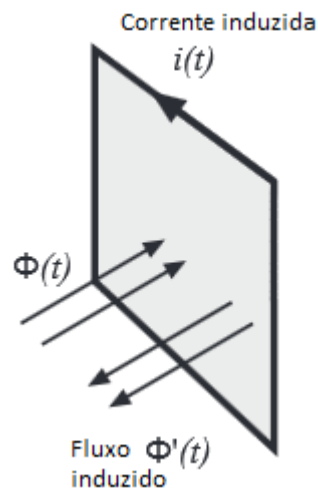


Figura 2.11: Imagem ilustrativa da lei de *Lenz*, modificado a partir de [1]

O fluxo  $\Phi(t)$  que passa pelo enrolamento induz uma tensão que é dividida pela impedância do enrolamento o que da uma corrente. Esta corrente induz uma variação de fluxo  $\Phi'(t)$  que se opõe a  $\Phi(t)$ .

A lei de *Amperè* relaciona corrente num enrolamento com força Magneto-motriz ( $F$ ) e campo magnético  $H$  (figura 2.12).

$$v(t) = A_c \frac{dB(t)}{dt} \quad (2.6)$$

$$\oint_{\text{caminho fechado}} H \cdot dl = \text{Corrente total pelo interior do caminho} \quad (2.7)$$

$$F(t) = H(t)l_m = i(t) \quad (2.8)$$

Onde  $l_m$  simboliza o comprimento magnético.

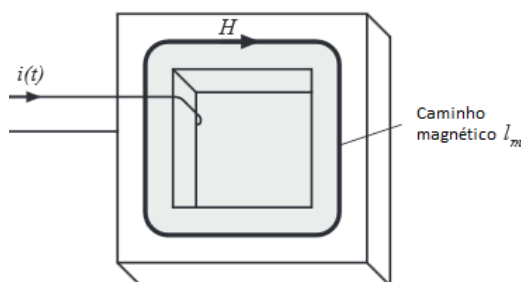


Figura 2.12: Exemplo demonstrativo da lei de Amperè onde vemos o caminho fechado  $l_m$  e a corrente que passa pelo interior do mesmo, modificado a partir de [1]

Há também que considerar as propriedades do material, nomeadamente a permeabilidade do mesmo, sendo que a densidade de fluxo relaciona-se com o campo magnético  $H$  pela equação  $B = \mu H$  sendo que a permeabilidade do material é dada por:

$$\mu = \mu_0 * \mu_r \quad (2.9)$$

Em que a constante  $\mu_0$  vale  $4\pi * 10^{-7}$  H/m e  $\mu_r$  é a permeabilidade relativa do material.



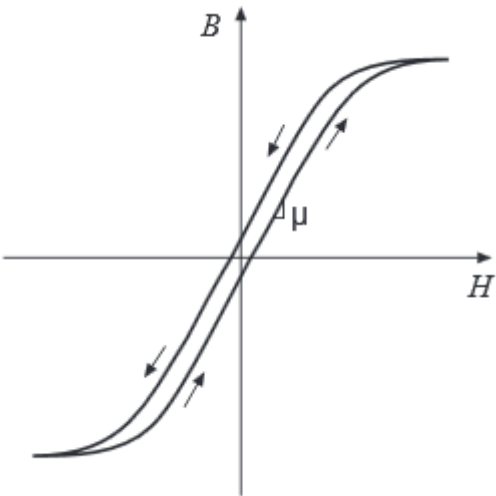


Figura 2.13: Característica B-H do núcleo do transformador, modificado a partir de [1]

Tabela 2.2: Símbolos e unidades de comparação usadas no estudo de transformadores [8]

Símbolo	Unidade
B(densidade de fluxo)	<i>Tesla</i>
H(campo magnético)	A/m
Φ(fluxo magnético)	Wb

Os núcleos do transformador são normalmente caracterizados pela sua característica B-H representada na figura 2.13. Também há que ter esta curva em conta já que ela nos diz informações importantes sobre condições de saturação, representadas na tabela 2.2.

Tabela 2.3: Densidade de fluxo e respetivo campo magnético [8]

Densidade de fluxo (B))	Campo magnético (H)
$B = B_{sat}$	$H \geq \frac{B_{sat}}{\mu}$
$B = \mu H$	$H \leq \frac{B_{sat}}{\mu}$
$B = -B_{sat}$	$H \leq \frac{B_{sat}}{\mu}$

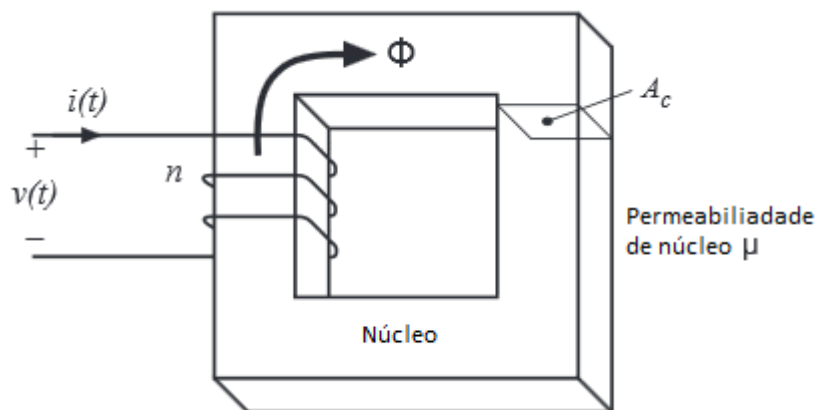


Figura 2.14: Exemplo da geometria de um indutor, modificado a partir de [1]

Analisando o circuito magnético da figura 2.14 chegamos às seguintes equações que relacionam a tensão  $v(t)$  como o fluxo e densidade de fluxo.

$$v(t) = n v_{\text{espira}}(t) = n \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (2.10)$$

onde  $n$  é o número de espiras.

$$v(t) = n A_c \frac{dB(t)}{dt} \quad (2.11)$$

$$B = \frac{\phi}{A_c} \quad (2.12)$$

Pela lei de *Amperè* temos que cada enrolamento tem uma determinada corrente logo:

$$H(t) l_m = n i(t) \quad (2.13)$$

$$I_{\text{sat}} = \frac{B_{\text{sat}} * l_m}{\mu * n} \quad (2.14)$$

$$v(t) = \mu * n * A_c \frac{dH(t)}{dt} \quad (2.15)$$

$$v(t) = \frac{\mu * n * A_c}{I_m} \frac{di(t)}{dt} \quad (2.16)$$

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.17)$$

Chegamos assim ao valor da indutância:

$$L = \frac{\mu * n^2 * A_c}{I_m} \quad (2.18)$$

Pela lei de Faraday temos que:

$$v(t) = n * A_c \frac{dB_{sat}}{dt} = 0 \quad (2.19)$$

Quando o núcleo satura o circuito aproxima-se do curto-circuito. O dispositivo (figura 2.15) só se comporta como bobina quando a corrente do enrolamento é menor que corrente de saturação.

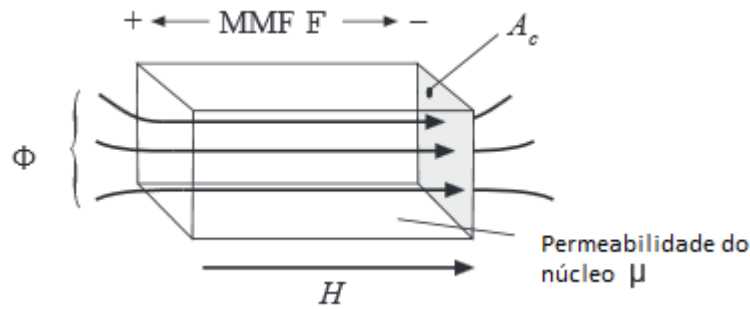


Figura 2.15: Elemento contendo fluxo magnético, modificado a partir de [1]

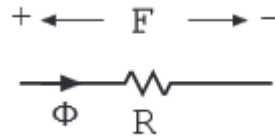


Figura 2.16: O circuito equivalente do elemento da figura 2.15 que contém fluxo magnético, modificado a partir de [1]

$$R = \frac{L}{\mu * A_c} \quad (2.20)$$

Onde R representa a relutância do circuito.

$$F = Hl \quad (2.21)$$

$$H = \frac{B}{\mu} \quad (2.22)$$

$$B = \frac{F}{A_c} \quad (2.23)$$

Tal como existe nos circuitos elétricos leis que nos permitem estudar os mesmos, essas mesmas leis, nomeadamente as leis de *Kirchhoff*, também podem ser usadas na análise de circuitos magnéticos (figura 2.17), com ligeiras diferenças.

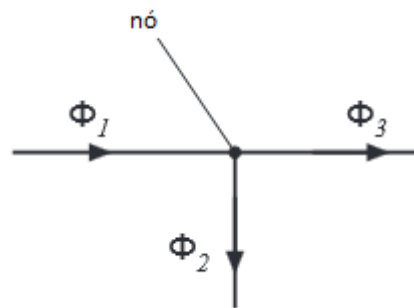


Figura 2.17: Leis de *Kirchhoff* aplicadas a circuitos magnéticos, modificado a partir de [1]

Usando a lei de *Kirchhoff* temos que o somatório dos fluxos é  $\phi_1 = \phi_2 + \phi_3$ . Sabendo que a Divergência de  $B$  é 0 logo as linhas de fluxo são contínuas e não acabam temos que  $\sum \phi = 0$ .

De seguida iremos analisar o mesmo indutor, agora com entre-ferro (*air gap*) (figura 2.18).

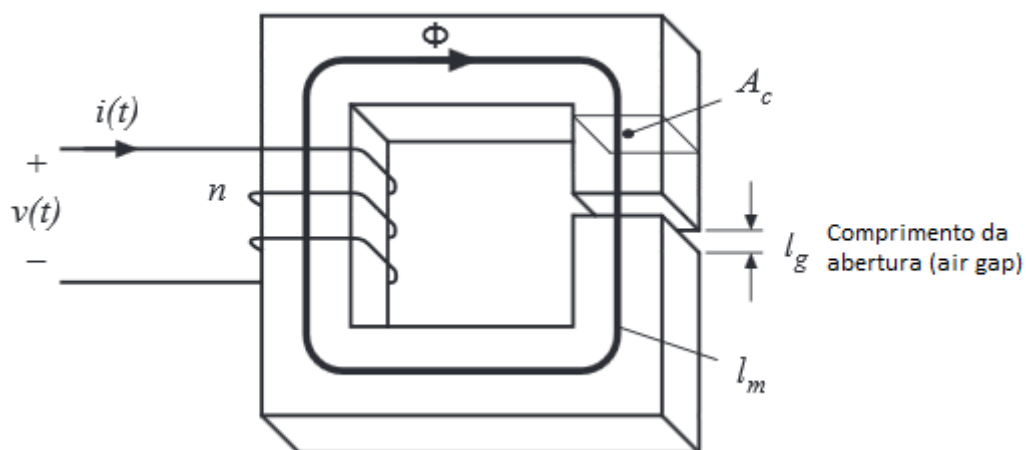


Figura 2.18: Indutor com abertura, modificado a partir de [1]

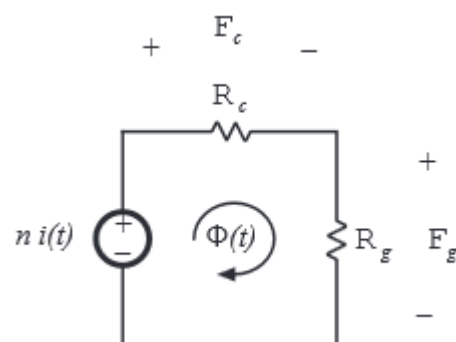


Figura 2.19: Circuito equivalente do indutor da figura 2.18, modificado a partir de [1]

Analisando o circuito magnético temos que:

$$F_c + F_g = n * i \quad (2.24)$$

Onde  $F_c$  representa a força magneto-motriz na relutância e  $F_g$  representa a mesma força no entre-ferro.

$$v(t) = n \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (2.25)$$

$$R_c = \frac{l_c}{\mu * A_c} \quad (2.26)$$

$$R_g = \frac{l_g}{\mu_0 * A_c} \quad (2.27)$$

Efeito do entre-ferro nos circuitos é demonstrado na seguinte figura.

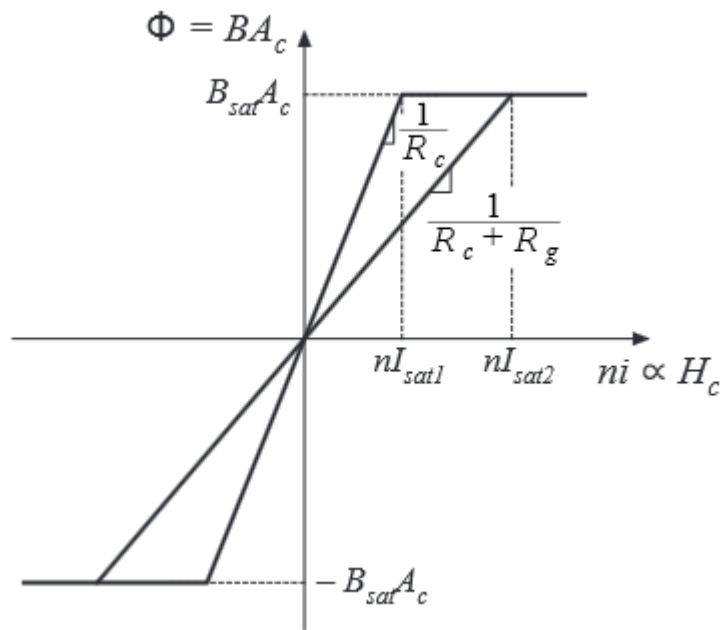


Figura 2.20: Efeito da abertura no circuito magnético modificado a partir de [1]

A abertura faz com que o indutor opere com correntes mais altas mas sem saturação (figura 2.20). Permite também que o valor da indutância seja insensível a variações de  $\mu$ . Quando núcleo satura:

$$\phi_{sat} = B_{sat} * A_c \quad (2.28)$$

A corrente nos enrolamentos é:

$$I_{sat} = \frac{B_{sat} * A_c}{n} (R_c + R_g) \quad (2.29)$$

A abertura aumenta a corrente de saturação e diminui a indutância do circuito.

## 2.3 Modelação do transformador

De seguida analisaremos um transformador de 2 enrolamentos (figura 2.21). A relutância do mesmo é dada por:

$$R = \text{relutancia} = \frac{l_m}{\mu * A_c} \quad (2.30)$$

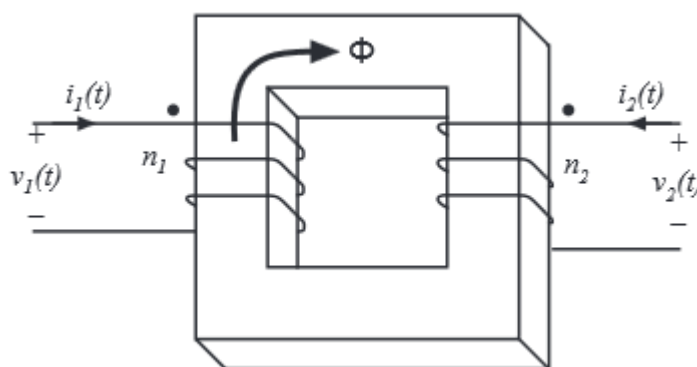


Figura 2.21: Transformador de 2 enrolamentos, modificado a partir de [1]

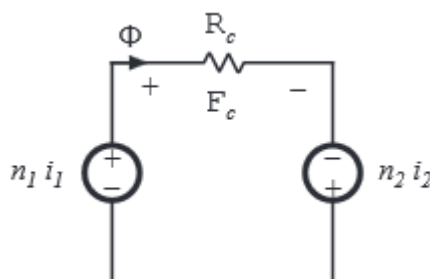


Figura 2.22: Circuito equivalente magnético do transformador da figura 2.21, modificado a partir de [1]

Pela lei de Amperè:

$$F_c = i_1 n_1 + i_2 n_2 \quad (2.31)$$

$$\phi R_c = i_1 n_1 + i_2 n_2 \quad (2.32)$$

$$F_c = \phi R_c \quad (2.33)$$

Num transformador ideal a relutância é nula, logo:

$$0 = i_1 n_1 + i_2 n_2 \quad (2.34)$$

Pela lei de Faraday:

$$v_1 = n_1 \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (2.35)$$

$$v_2 = n_2 \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (2.36)$$

Nas equações acima,  $\Phi$  é o mesmo, já que o fluxo entre os enrolamentos é igual. Eliminando  $\Phi$  temos:

$$\frac{v_1}{n_1} = \frac{v_2}{n_2} \quad (2.37)$$

$$0 = i_1 n_1 + i_2 n_2 \quad (2.38)$$

Para o caso em que a relutância do núcleo ser diferente de 0, existe indutância de magnetização(figura 2.23) temos:

$$\phi R = i_1 n_1 + i_2 n_2 \quad (2.39)$$

$$v_1 = n_1 \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (2.40)$$

Eliminando  $\Phi$  temos:

$$v_1 = \frac{n_1^2}{R} \frac{d}{dt} \left[ i_1 + \frac{n_2}{n_1} i_2 \right] \quad (2.41)$$

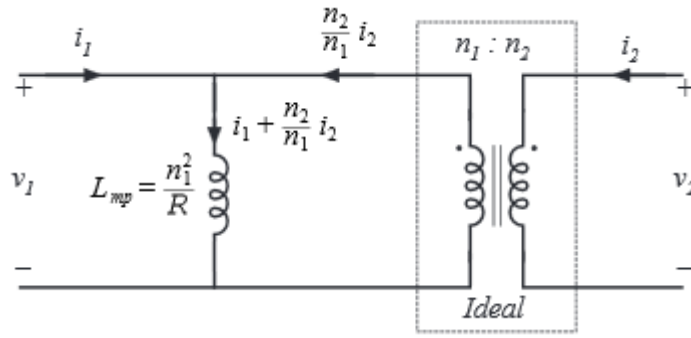


Figura 2.23: Modelo do transformador com indutância de magnetização, modificado a partir de [1]

Temos portanto uma equação da forma:

$$v_1 = L_m \frac{di_M}{dt} \quad (2.42)$$

Onde  $i_M$  representa a corrente magnetizante e  $L_m$  representa a indutância de magnetização. Com:

$$L_m = \frac{n_1^2}{R} \quad (2.43)$$

$$i_M = i_1 + \frac{n_2}{n_1} i_2 \quad (2.44)$$

A indutância e corrente de magnetização referem-se ao enrolamento primário. A indutância do núcleo é um indutor real com saturação e histerese. Quando transformador satura, a densidade de fluxo  $B(t)$  excede o valor de  $B_{sat}$ . Neste caso  $i_M(t)$  torna-se grande, a impedância da indutância magnetizante torna-se pequena e os enrolamentos de transformador ficam curto-circuitados. A saturação é portanto causada pela tensão aplicada por intervalo de tempo.

$$i_M(t) = \frac{1}{L_m} \int v_1(t) dt \quad (2.45)$$

A densidade de fluxo no núcleo do transformador pode ser descrita por:

$$B(t) = \frac{1}{n_1 * Area} \int v_1(t) dt \quad (2.46)$$

A densidade de fluxo e a corrente de magnetização ficam grandes para saturar o núcleo quando o valor de  $\lambda_1$  (volts por segundo) é muito alto.

$$\lambda_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_1(t) dt \quad (2.47)$$

Para contornarmos a saturação, a densidade de fluxo deve ser reduzida aumentando o número de espiras ou aumentando a secção ( $A_c$ ). Colocar a abertura simplesmente torna o transformador



menos ideal, não modificando a saturação. Os mecanismos de saturação em transformadores diferem dos mecanismos de saturação em indutores, já que a saturação do transformador é determinada pela forma de tensão dos enrolamentos e não pela corrente nos mesmos.

### 2.3.1 Indutância de fugas

Na prática existe fluxo num enrolamento mas não no outro, fechando-se pelo ar ou outro mecanismo. Isto leva às indutâncias de fugas (indutâncias em série umas com as outras, figura 2.24).

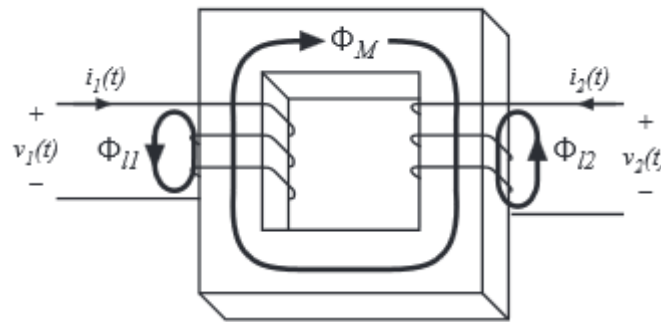


Figura 2.24: Indutância de fugas num transformador de 2 enrolamentos, modificado a partir de [1]

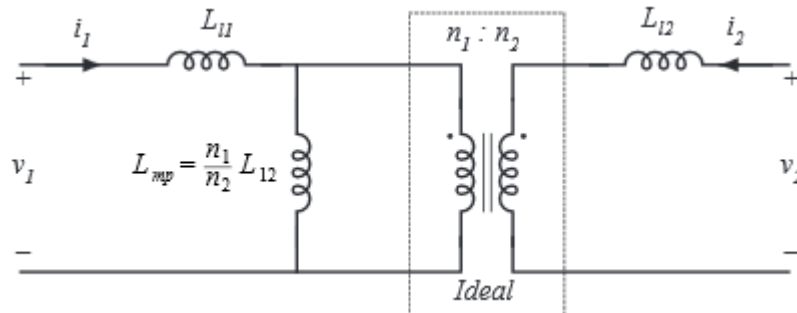


Figura 2.25: Circuito equivalente do transformador da figura 2.24 considerando agora as indutâncias de fugas, modificado a partir de [1]

As indutâncias de fugas fazem variar o rácio  $\frac{n_2}{n_1}$ .

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$L_{12} = \text{indutância mútua} = L_{12} = \frac{n_1 * n_2}{R} = \frac{n_2}{n_1} L_m \quad (2.49)$$

$L_{11}$  e  $L_{22}$  são as indutâncias próprias (*self inductances*) do primário e secundário.

$$L_{11} = L_{i1} + \frac{n_1}{n_2} L_{12} \quad (2.50)$$

$$L_{22} = L_{i2} + \frac{n_2}{n_1} L_{12} \quad (2.51)$$

Número de enrolamentos efetivos ( $n_e$ ):

$$n_e = \sqrt{\frac{L_{22}}{L_{11}}} \quad (2.52)$$

Coeficiente de acoplamento ( $k$ ):

$$k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11} * L_{22}}} \quad (2.53)$$

$$0 \leq k \leq 1 \quad (2.54)$$

Se o acoplamento for perfeito  $k=1$  porque  $L_{i1}$  e  $L_{i2}$  valem 0, e portanto  $n_e \approx \frac{n_2}{n_1}$ .

### 2.3.2 Perdas no núcleo

As perdas no núcleo podem ser observadas na característica B-H. Considerando um indutor de  $n$  enrolamentos excitado por  $v(t)$  e  $i(t)$  com frequência  $f$ , temos que a energia que flui no indutor durante um ciclo é dada pela expressão:

$$W = \int_{\text{um ciclo}} v(t)i(t)dt \quad (2.55)$$

Substituindo  $B(t)$  por  $v(t)$  e  $H(t)$  por  $i(t)$ , usando a lei de *Amperè* temos:

$$W = \int_{\text{um ciclo}} (nA_c \frac{dB(t)}{dt}) (\frac{H(t)l_m}{n}) dt = fA_cl_m \int_{\text{um ciclo}} HdB \quad (2.56)$$

Na equação acima o termo  $A_cl_m$  simboliza o volume do núcleo. Para a energia perdida por ciclo temos que :

$$(\text{Energia perdida por ciclo}) = (\text{volume do núcleo})(\text{área da característica B-H}) \quad (2.57)$$

As perdas de potência por histerese  $P_H$  são iguais à energia perdida por ciclo, multiplicada pela frequência de excitação  $f$ :

$$P_H = fA_cl_m \int_{\text{um ciclo}} HdB \quad (2.58)$$

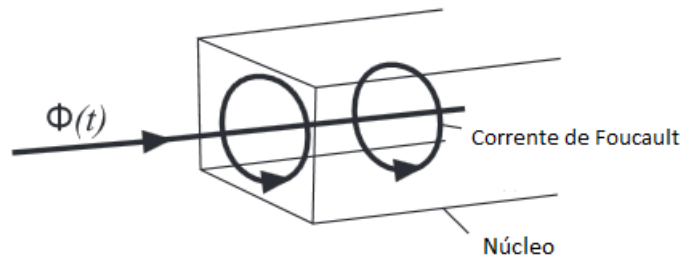


Figura 2.26: Correntes de *Foucault* num núcleo de ferro, modificado a partir de [1]

Os materiais do núcleo são ligas de ferro, que também são condutores elétricos. Campos magnéticos AC causam correntes de *Foucault* que fluem pelo material. Fluxo AC  $\Phi(t)$  passa pelo núcleo. Isto induz correntes de *Foucault*  $i(t)$  (figura 2.26), que de acordo com a lei de *Lenz* fluem no sentido oposto a  $\Phi(t)$ . Estas correntes causam perdas  $i^2R$ . São maiores, quanto mais alta a frequência. Em ferrites a impedância diminui com o aumento de frequência.

### 2.3.2.1 Materiais do núcleo

Com  $B$  (densidade de fluxo) alto temos tamanho, peso e custos reduzidos. Por exemplo, nos aços com adição de silício obtêm-se uma densidade de fluxo que varia entre 1.5 a 2 *Tesla*, mas tem altas perdas no núcleo, só servindo para baixas frequências. As ligas de materiais ferromagnéticos do tipo Ferro-Níquel-Molibdénio (*Mo-Permalloy*) têm surgido com o objetivo de melhorar o seu desempenho, permitindo perdas do núcleo mais baixas que materiais laminados de ligas de ferro. As densidades de fluxo típicas são entre 0.6 a 0.8 *Tesla* e são usadas para altas frequências. Ligas amorfas têm baixas perdas de histerese e com densidades de fluxo entre 0.6 e 1.5 *Tesla*. Os núcleos de ferrite são materiais cerâmicos com baixas densidades de fluxo (0.25 a 0.5 *Tesla*) mas com resistividade maior logo com menos correntes de *Foucault*. Por fim temos os núcleos de ferrites de manganésio-zinco que são muito usados em transformadores e indutores que operem em frequências que vão dos 10kHz até 1MHz, e mesmo frequências mais altas.

Tabela 2.4: Tipos de núcleo, valores de densidade de fluxo, perdas e aplicações [8]

Tipo de núcleo	$B_{sat}$ (Tesla)	Perdas do núcleo	Aplicações
Laminações de ferro e aços com adição de silício	1.5-2	Altas	Transformadores 50-60 Hz, indutores
Ligas de materiais ferromagnéticos do tipo Ferro-Níquel-Molibdénio ( <i>Mo-Permalloy</i> )	0.6-0.8	Médias	Transformadores 1 kHz, filtros indutores 100kHz
Ferrites de manganésio-zinco e Níquel-zinco	0.25-0.5	Baixas	Transformadores 20kHz a 1MHz, indutores AC

$$\text{Perdas de cobre} = P_{cu} = I_{rms}^2 R \quad (2.59)$$

$$\text{Perdas de baixa frequência no ferro} = P_{fe} = K_{fe} (\delta_B)^{(\beta A_c l_m)} \quad (2.60)$$

Em que  $K_{fe}$  e  $\beta$  são dados pelo fabricante.

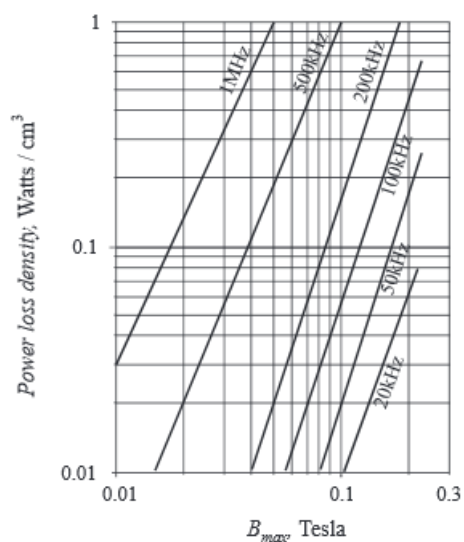


Figura 2.27: Perdas no núcleo em materiais de ferrite, para altas frequências, modificado a partir de [1]

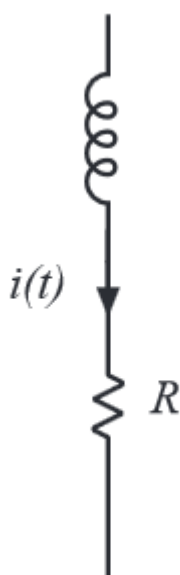


Figura 2.28: Enrolamento equivalente que modela perdas de cobre, modificado a partir de [1]

$$R = \rho \frac{l_b}{A_w} \quad (2.61)$$

As correntes de *Foucault* causam perdas nos enrolamentos (figura 2.28). Os mecanismos pelos quais se propagam estas perdas denominam-se efeito pelicular (*skin effect*) e efeito de proximidade. O efeito pelicular caracteriza-se pela tendência para que as correntes a elevadas frequências circulem na parte mais externa do condutor. O efeito de proximidade associa-se à tendência para

a corrente fluir em percursos não desejáveis devido à presença de campos magnéticos produzidos por condutores na proximidade. Estes efeitos são mais sentidos em conversores de alta frequência.

### 2.3.2.2 Tipos de núcleo

#### Núcleos de ferrite

A maioria dos núcleos de transformadores [13] de ferrite consistem em dois como pedaços reunidos por moagem adequada e técnicas de polimento de modo que o intervalo de ar resultante entre a superfície de acasalamento é virtualmente eliminado. No sentido de evitar a saturação do núcleo devido à componente contínua da corrente, introduz-se no circuito magnético um entreferro.

Existem vários tipos de formas de núcleo. Cada forma tem proporções ótimas para a obtenção de características específicas desejadas. Normalmente, a exigência de rescisão, padrão terra, preocupações EMI (interferência eletromagnética), e altura do perfil todos levam à escolha adequada de forma central. Veremos então os diferentes tipos de formas de núcleos:

#### Núcleos em forma de E



Figura 2.29: Núcleo E

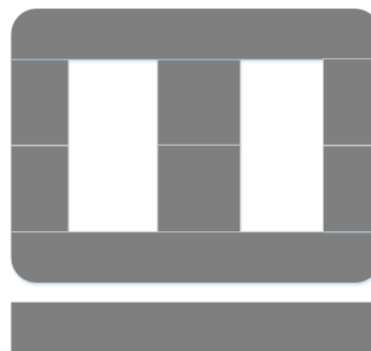


Figura 2.30: Núcleo em duplo E

Núcleos em forma de E (figuras 2.29 e 2.30) são menos dispendiosos do que outros núcleos ("pot cores"), e têm a vantagem de fácil montagem. Núcleos em forma de E são soluções mais simétricas para formar um sistema magnético fechado. Estes núcleos não oferecem auto-blindagem. São populares devido ao seu baixo custo e facilidade de montagem e sinuosas.

Na maioria das vezes, o circuito elétrico está enrolado em torno da perna central, cuja secção que é duas vezes de cada perna exterior.

#### Núcleos em forma de U



Figura 2.31: Núcleo U

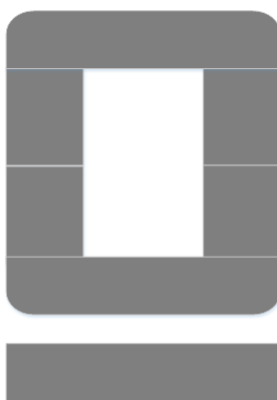


Figura 2.32: Núcleo em duplo U

Núcleos em forma de U (figuras 2.31 e 2.32) são geralmente usados com outros núcleos em forma de U para fazer um núcleo quadrado fechado (duplo U), a forma mais simples de núcleo fechado. Os enrolamentos podem ser colocado em uma ou ambas as pernas do núcleo.

#### Núcleo "Pot core"



Figura 2.33: Núcleo "Pot core"

O núcleo "Pot core" é um cilindro fechado contendo um poste central rodada na posição vertical em que uma bobina é colocada. Núcleos "Pot core", quando montados, cercam a bobina.

Isto ajuda a proteger a bobina de EMI's externos. As dimensões do núcleo de pote normalmente seguem padrões internacionais para que haja permutabilidade entre os fabricantes. Devido ao seu design, o núcleo em forma pote é um núcleo mais caro do que outras formas de tamanho comparável. Normalmente um núcleo "Pot core" é feito em duas metades que se encaixam em torno de uma bobina. Este design de núcleo tem um efeito de blindagem, impedindo radiação e reduzindo a interferência eletromagnética [13].

#### Núcleos EP



Figura 2.34: Núcleo EP

Núcleos EP (figura 2.34) são núcleos que encerram a bobina completamente exceto para os terminais da placa de circuito impresso. A forma particular minimiza o efeito de lacunas de ar formados em superfícies de contacto no circuito magnético e proporciona uma maior proporção em volume de espaço total utilizado. Este tipo de núcleo possui também uma excelente blindagem [13].

#### Núcleo PQ

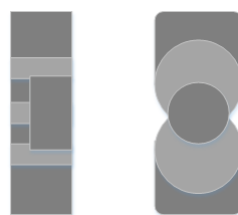


Figura 2.35: Núcleo PQ

Núcleos PQ (figura 2.35) são concebidos especialmente para fontes de alimentação de modo comutado. O projeto fornece uma relação otimizada de volume para área do enrolamento e área de superfície. Os núcleos fornecem potência máxima com um mínimo de peso e volume. Estes núcleos tendem a operar com menos pontos quentes do que outros tipos [13].

#### Núcleo toroidal



Figura 2.36: Núcleo toroidal

A simetria desta geometria (figura 2.36) cria um campo magnético de espiras circulares no interior do núcleo, e a falta de curvas apertadas irão restringir virtualmente todo o campo para o material do núcleo. Isto não só torna um transformador altamente eficiente, mas também reduz a interferência eletromagnética irradiada pela bobina. É popular para aplicações onde as características desejáveis são a alta potência específica por massa e volume e baixa interferência magnética. A principal desvantagem que limita seu uso para aplicações de uso geral é a dificuldade inerente de enrolamento de fio. Tem menos ruído audível, como o zumbido da corrente, pois as forças magnéticas não exercem momento de flexão no núcleo. A blindagem deste tipo de núcleo é relativamente boa [13].

### Núcleo planar

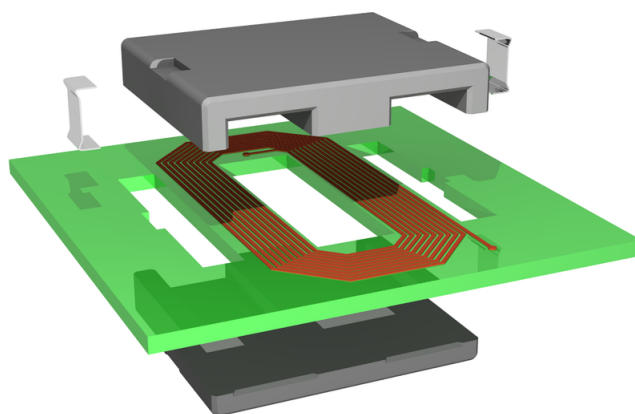


Figura 2.37: Núcleo planar, retirado de [2]

Um núcleo planar (figura 2.37) é constituído por duas peças planas de material magnético, uma acima e outra abaixo da bobina. É tipicamente usado com uma bobina plana que faz parte de uma placa de circuito impresso. Este projeto é excelente para a produção em massa e permite uma alta potência, pequeno volume do transformador a ser construído para baixo custo.



### 2.3.3 Efeito pelicular

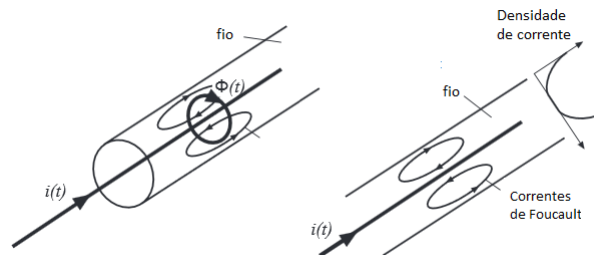


Figura 2.38: Na imagem da direita vemos o fluxo induzido pela corrente, enquanto que na imagem da direita vemos as correntes de *Foucault* resultantes pela oposição á mesma corrente, modificado a partir de [1]

Pela figura 2.38 vimos que  $i(t)$  induz  $\Phi(t)$  que por sua vez induz uma corrente de *Foucault*, fenómeno explicado pela lei de Lenz. As correntes de *Foucault* reduzem o somatório da densidade de corrente no centro do condutor e aumentam o somatório de densidade de corrente perto da superfície do mesmo.

$$\delta = \text{penetração pelicular} = \sqrt{\frac{\rho}{\mu\pi f}} \quad (2.62)$$

onde  $\rho$  simboliza a resistividade do condutor.

Este efeito é prejudicial a altas frequências. Correntes de *Foucault* depois induzem efeito de proximidade em condutores próximos.

### 2.3.4 Calibre dos condutores

AWG ou American Wire Gauge [14][15] é sistema padronizado mais usado nos Estados Unidos, bem como noutros países, no que respeita ao calibre de condutores (fios), nomeadamente condutores elétricos. Serve para medir a grossura do condutor tendo em conta o seu processo de fabrico. Este sistema tem em conta a secção do condutor tendo em conta a determinação da sua capacidade de conduzir corrente.

Em AWG o diâmetro sobe à medida que o calibre desce mas na escala métrica funciona ao contrário [14]. Estas tabelas são para condutores singulares, sólidos e redondos. Em AWG cada descida de 6 calibres, significa um aumento para o dobro no diâmetro do condutor, e cada descida de 3 calibres a secção do mesmo também aumenta para o dobro.

Tabela 2.5: Valores exemplos de AWG

Valor AWG	Diâmetro (mm)	Secção ( $\text{mm}^2$ )
5	4.621	16.8
6	4.115	13.3
7	3.665	10.5

Na escala métrica o calibre é 10 vezes o diâmetro em milímetros, portanto um calibre 50 métrico de um condutor seria 5 milímetros em diâmetro.

O efeito pelicular é a principal causa das perdas do cobre a altas frequências. Este efeito causa resistência e perdas no cobre de grandes diâmetros a aumentar a grandes frequências. Correntes a altas frequências não penetram no centro do condutor. As correntes amontoam-se na superfície, o interior não é usado, a secção do cobre efetiva é diminuída. No entanto o efeito pelicular não explica todas as perdas no cobre a alta frequência.

### 2.3.5 Efeito de proximidade

Um condutor que tenha uma corrente  $i(t)$  a alta frequência vai induzir uma corrente no cobre adjacente através do efeito de proximidade.

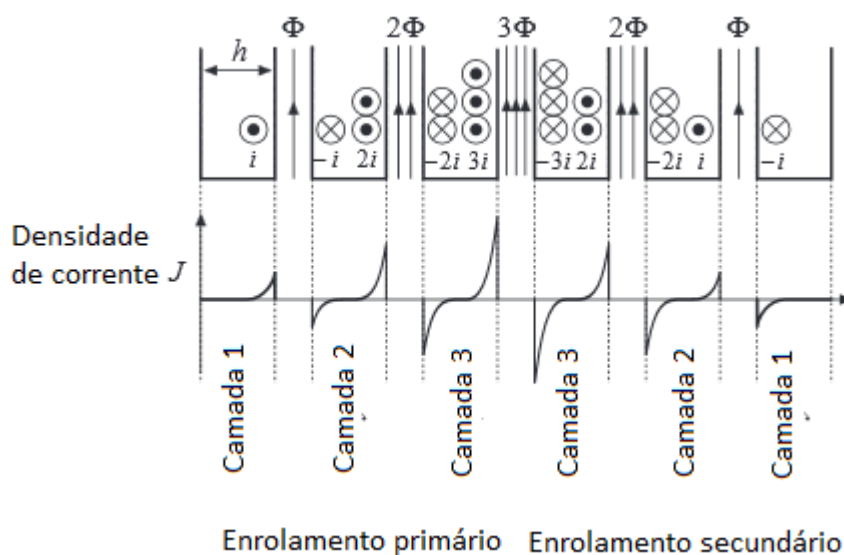


Figura 2.39: Imagem que ilustra efeito de proximidade, modificado a partir de [1]

Onde  $h$  simboliza a grossura do condutor e  $\delta$  simboliza a profundidade de penetração e

$$\delta_{condutor1} \ll h_{condutor1} \quad (2.63)$$

A corrente  $i(t)_{condutor}$  gera fluxo  $\Phi(t)$  no espaço entre 1 e 2. Este fluxo tenta penetrar em 2. Pela lei de Lenz a corrente induzida no lado esquerdo de 2 opõe-se ao fluxo  $\Phi(t)$ . Com pouco espaço entre condutores e se  $\delta$  for muito menor que  $h$  então corrente induzida vai ser igual e oposta a  $i(t)$ . Como o condutor 2 está em circuito aberto e  $\sum i(t) = 0$  então no lado direito circula uma corrente  $+i(t)$ . Logo  $i(t)$  do condutor 1 induz uma corrente que circula nas superfícies do condutor 2.

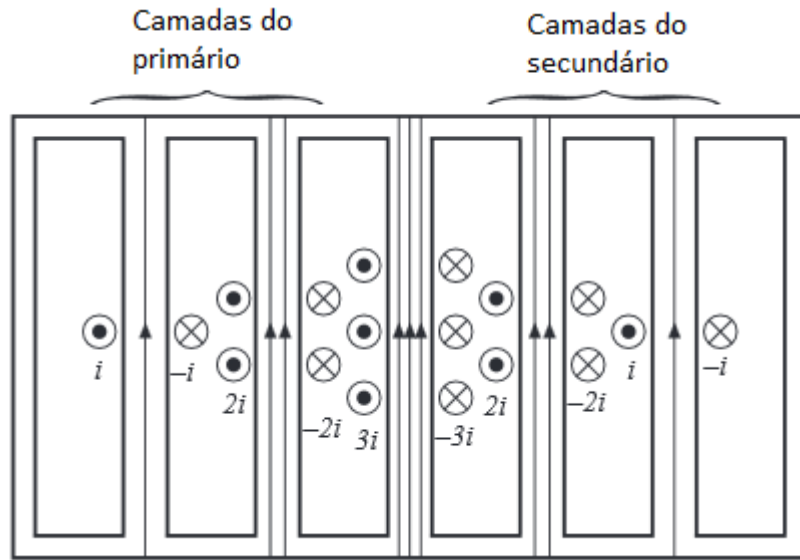


Figura 2.40: Transformador de 2 enrolamentos, modificado a partir de [1]

Primário são 3 espiras (em série) de cobre com grossura  $h \gg \delta$  e com  $\sum i(t) = i(t)$ . Os enrolamentos estão revestidos de um núcleo (material magnético) que circunda o fluxo mútuo do transformador. A corrente sinusoidal de alta frequência  $i(t)$  circula pela superfície da camada 1 (primário da camada 1). Induz perdas no cobre em 1. Estas perdas são calculadas da seguinte maneira.

Efeito pelicular causa perdas no cobre em 1 a serem iguais a perdas de um condutor de grossura  $\delta$  com densidade de corrente uniforme. Redução da grossura do condutor de  $\delta$  para  $h$  aumenta resistência pelo mesmo fator. Logo a "indutância AC" da camada 1 pode ser vista como:

$$R_{ac} = \frac{h}{\delta} R_{dc} \quad (2.64)$$

Onde  $R_{dc}$  simboliza a resistência DC da camada 1. As perdas de cobre na camada 1 são dadas por:

$$P_1 = I^2 R_{ac} \quad (2.65)$$

Onde  $I$  simboliza o valor rms de  $i(t)$  e  $R_{ac}$  simboliza a resistência AC da camada 1. Como camadas 1 e 2 estão ligadas em série  $\sum i(t) = i(t)$ , o mesmo somatório de corrente circula nas 2 camadas (camada 1 e 2). Logo como do lado esquerdo temos  $-i(t)$  do lado direito vamos ter  $+2i(t)$ . Corrente do lado esquerdo é igual á corrente da camada 1 logo as perdas de cobre são  $P_1$ . A corrente do lado direito da camada 2 tem magnitude  $2i(t)$  logo perdas do cobre são  $(2i)^2 R_{ac}$  o que dá  $4P_1$ .

Perdas totais no cobre do primário da camada 2 são:

$$P_2 = P_1 + 4P_1 = 5P_1 \quad (2.66)$$

Perdas na 2ª camada são 5 vezes maiores que perdas da primeira camada. Corrente  $2i(t)$  induz fluxo de  $2\Phi(t)$  na camada (lado esquerdo causa corrente de  $-2i$ ).

$$P_3 = \text{perdas cobre na camada 3} = (2^3 + 3^2)P_1 = 13P_1 \quad (2.67)$$

$$P_m(\text{perdas na camada } m) = I^2[(m-1)^2 + m^2]\left(\frac{h}{\delta}R_{dc}\right) \quad (2.68)$$

Se o enrolamento contém  $M$  camadas então:

$$P = \text{Perdas de cobre} = I^2\left(\frac{h}{\delta}R_{dc}\right) \sum_{m=1}^M [(m-1)^2 + m^2] \quad (2.69)$$

$$P = I^2\left(\frac{h}{\delta}R_{dc}\right) \frac{M}{3}(2M^2 + 1) \quad (2.70)$$

Se corrente dc ou de baixa frequência então:

$$P_{dc} = I^2 * M * R_{dc} \quad (2.71)$$

O efeito de proximidade faz aumentar as perdas de cobre por um fator  $F_R$ :

$$F_R = \frac{P}{P_{dc}} = \frac{1}{3}\left(\frac{h}{\delta}\right)(2M^2 + 1) \quad (2.72)$$

Esta expressão é válida se  $h \gg \delta$  e não é válido para condutores arredondados.

### 2.3.6 Fluxo de fugas

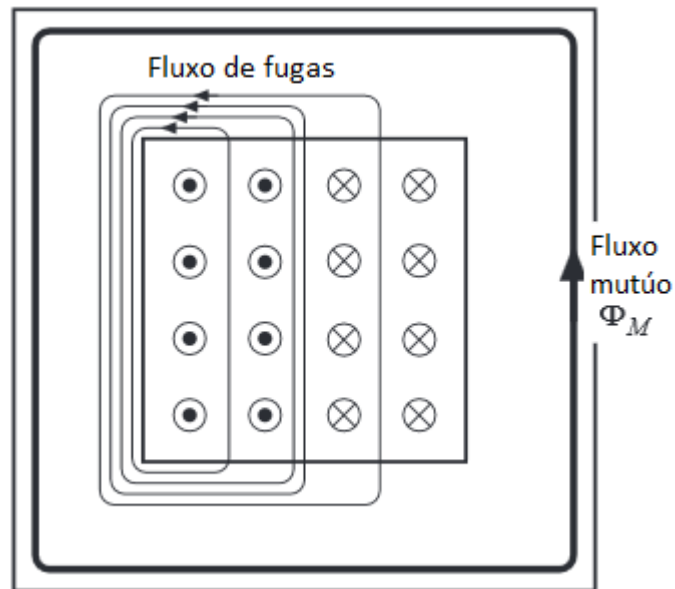


Figura 2.41: Típica distribuição de fluxo, modificado a partir de [1]

Primário tem 8 espiras em 2 camadas cada uma com  $i(t)$  (figura 2.41). Segundo enrolamento igual ao primeiro mas com polaridade de corrente inversa. Como núcleo tem grande permeabilidade  $\mu \gg \mu_0$  o MMF deste fluxo é desprezável.

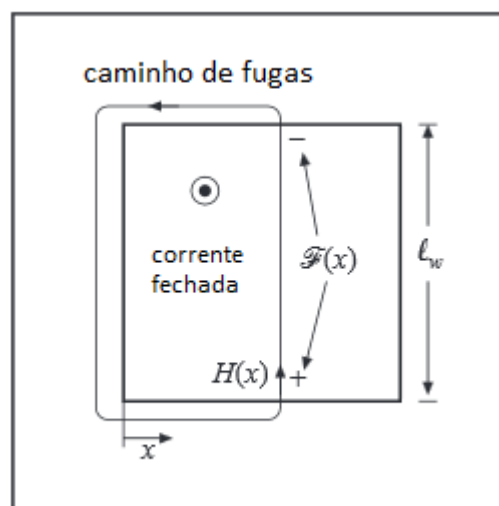


Figura 2.42: Análise do fluxo de fugas usando lei de Amperè no transformador, modificado a partir de [1]

Pela lei de Amperè temos que:

$$MMF_{total} = F(x) = H(x)l_w = \text{corrente enclausurada} \quad (2.73)$$

Em que  $l_w$  é a altura da janela (figura 2.42). A primeira camada consiste em 4 espiras cada uma a conduzir  $i(t)$ . Logo a corrente fechada (enclausurada) é  $4i(t)$ . Quando caminho fecha todo o primário (2 camadas) a corrente é de  $8i(t)$ . Quando todo o primário é fechado mais a segunda camada do secundário a corrente é  $8i(t) - 4i(t) = 4i(t)$ .

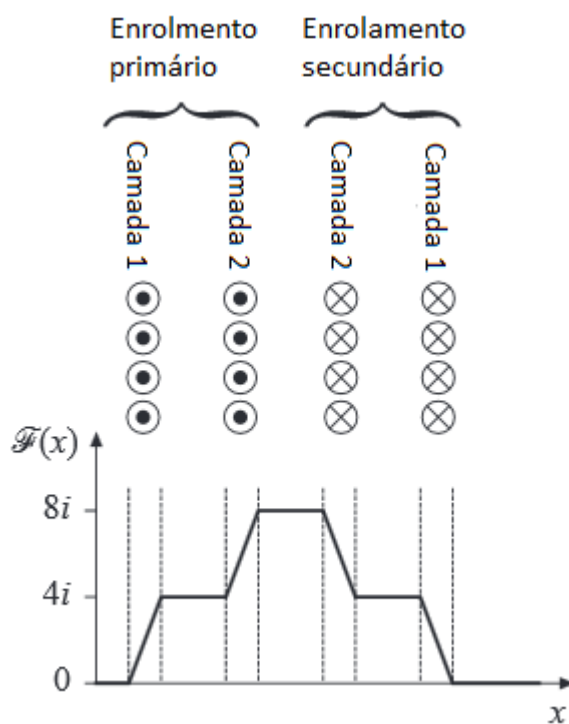


Figura 2.43: Valores de MMF por camada, modificado a partir de [1]

Para determinar a indutância de fugas e as correntes de *Foucault* dos enrolamentos, uma camada que consiste em  $n_l$  espiras que tem uma corrente  $i(t)$  pode ser modulada por uma espira que carrega consigo uma corrente  $n_l i(t)$  (figura 2.43).

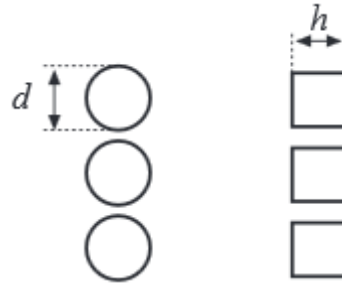


Figura 2.44: Condutores redondos e quadrados com a mesma secção

Substituindo os condutores redondos por quadrados com a mesma secção ( $A_c$ ) (figura 2.44). A grossura  $h$  do quadrado condutor é igual ao diâmetro do fio de cobre multiplicado por um fator  $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ .

$$h = \sqrt{\frac{\pi}{4}} d \quad (2.74)$$

Juntando os quadrados temos a camada do condutor.

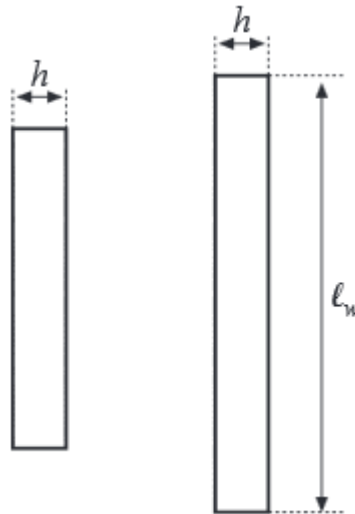


Figura 2.45: Na imagem da esquerda temos os condutores quadrados juntos enquanto que na direita estes foram esticados para a largura da janela, modificado a partir de [1]

Temos também que compensar a altura com fator compensador ou também denominado porosidade do enrolamento  $\eta$ , que simboliza o rácio da camada de cobre (figura 2.45). Este valor é cerca de 0.8 na maioria dos condutores.

$$\delta' = \frac{\delta}{\sqrt{\eta}} \quad (2.75)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\pi}{4}} d \frac{n_i}{l_w} \quad (2.76)$$

$$\varphi = \frac{h}{\delta'} = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{4}} \frac{d}{\delta} \quad (2.77)$$

### 2.3.7 Perdas nas camadas

Assumindo que o componente de campo magnético normal á superfície do condutor é nula (figura 2.46) chegamos à equação 2.78.

$$P = R_{dc} \frac{\varphi}{n_i^2} [(F(h)^2 + F(0)^2)G_1(\varphi) - 4F(h)F(0)G_2(\varphi)] \quad (2.78)$$

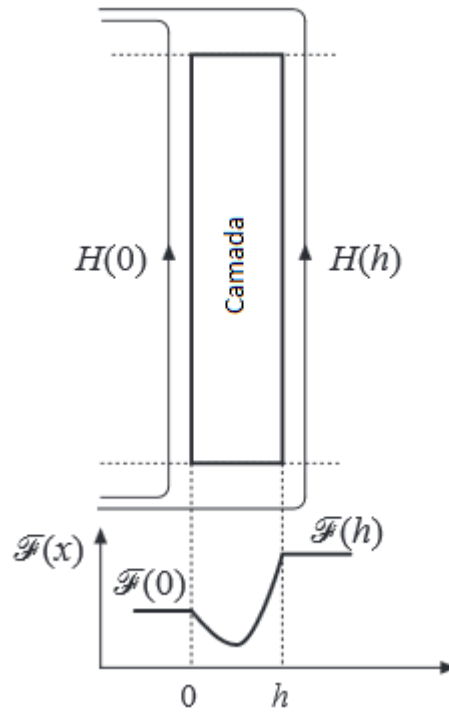


Figura 2.46: Perda de potência é determinada para uma camada uniforme com campos H(0) e H(h) aplicados á superfície, modificado a partir de [1]

$$G_1(\varphi) = \frac{\sinh(2\varphi) + \cosh(2\varphi)}{\cosh(2\varphi) - \cosh(2\varphi)} \quad (2.79)$$

$$G_2(\varphi) = \frac{\sinh(\varphi)\cosh(\varphi) + \cosh(\varphi)\sinh(\varphi)}{\cosh(2\varphi) - \cosh(2\varphi)} \quad (2.80)$$



Com a corrente nos enrolamentos de magnitude de  $I$  temos que:

$$F(h) - F(0) = n_i I \quad (2.81)$$

$$F(h) = m * n_i * I \quad (2.82)$$

Onde  $m$  é o rácio de MMF ( $F(h)$ ) para  $n_i I$ .

$$\frac{F(0)}{F(h)} = \frac{m-1}{m} \quad (2.83)$$

Potência dissipada:

$$P = I^2 R_{dc} \phi Q'(\phi, m) \quad (2.84)$$

$$Q'(\phi, m) = (2m^2 - 2m + 1)G_1(\phi) - 4m(m-1)G_2(\phi) \quad (2.85)$$

O efeito de proximidade faz aumentar perdas de cobre na camada por um fator de:

$$\frac{P}{I^2 R_{dc}} = \phi Q'(\phi, m) \quad (2.86)$$

Para perdas DC teríamos  $\phi = 1$  sendo que essas perdas seriam  $Q'(\phi, m)$ .

Temos portanto grandes perdas para  $\phi$  pequenos porque a camada é fina e resistência DC é grande. Para  $m$  e  $\phi$  grandes o efeito de proximidade (figura 2.47) leva a grandes perdas de potência (figura 2.48).

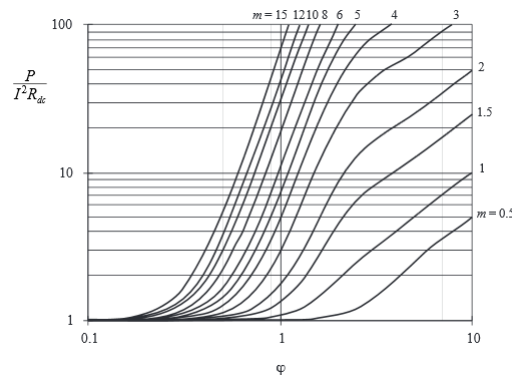


Figura 2.47: Perdas de cobre devido ao efeito de proximidade como função  $\phi$  de e do rácio  $m$ , modificado a partir de [1]

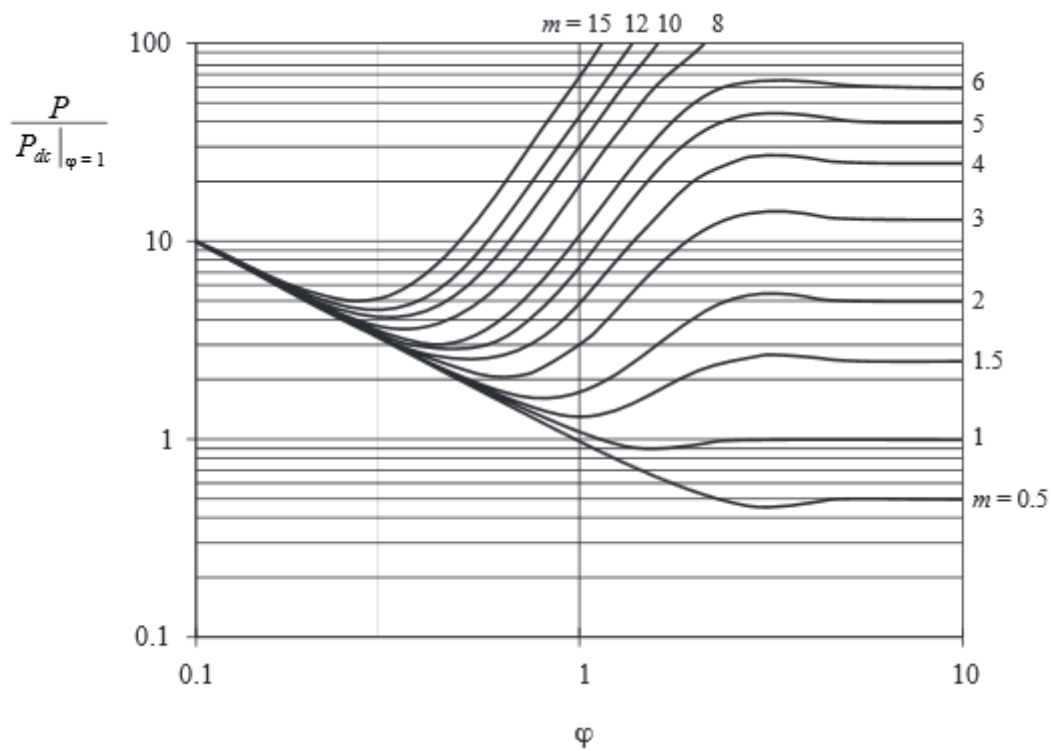


Figura 2.48: Perdas de cobre por camada relativamente às perdas DC numa camada com uma certa grossura, modificado a partir de [1]

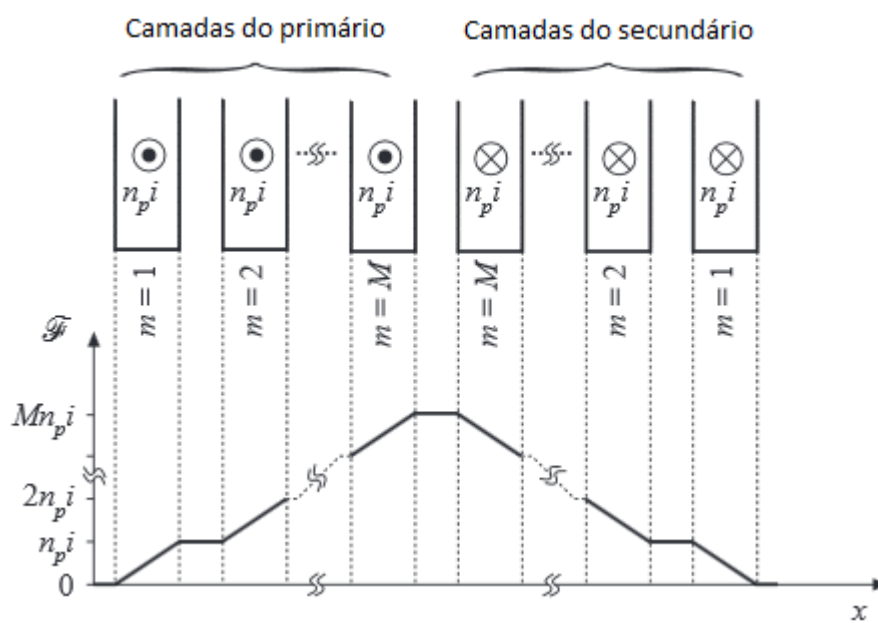


Figura 2.49: Exemplo de transformador com 2 enrolamentos, cada um com  $M$  camadas, modificado a partir de [1]

Uma maneira para reduzir perdas de cobre devido ao efeito de proximidade é intercalar os enrolamentos. Cada camada opera com  $F=0$  e  $F=i$  no outro lado com  $m=1$ . A perda de mínima de cobre ocorre para:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad (2.87)$$

$$m = \frac{F(h)}{F(h) - F(0)} \quad (2.88)$$

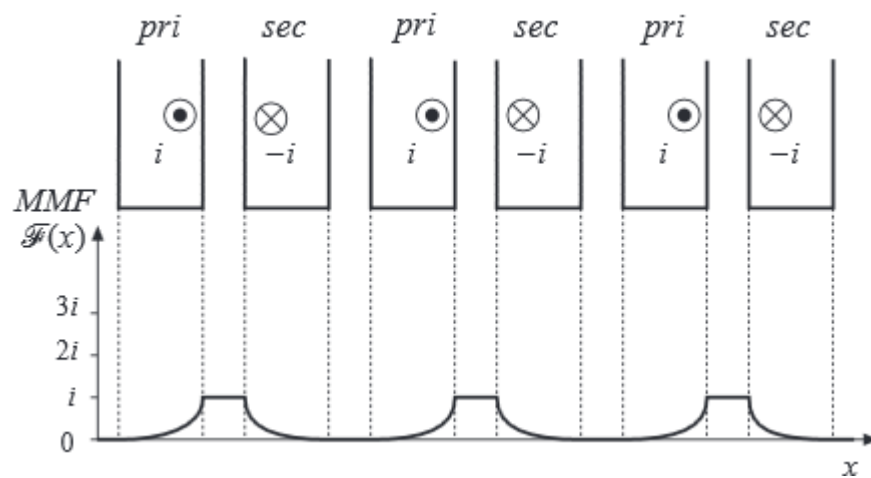


Figura 2.50: Diagrama de força magneto-motriz para transformador com enrolamentos intercalados, modificado a partir de [1]

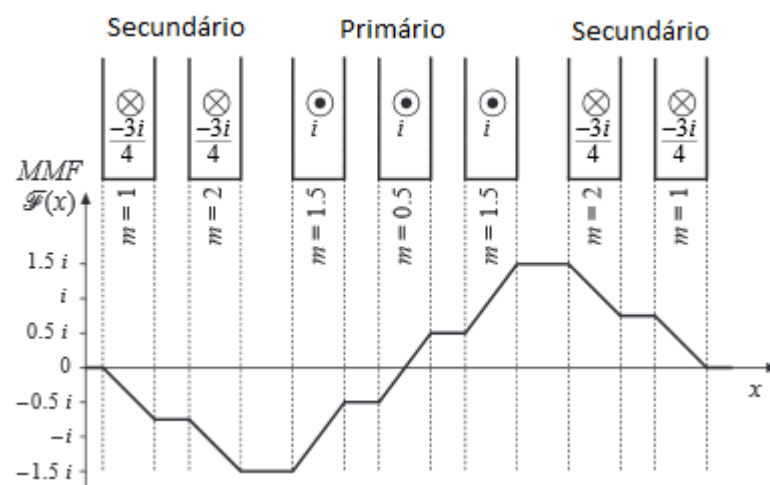


Figura 2.51: Transformador de 2 enrolamentos parcialmente intercalado com vários valores de  $m$ , modificado a partir de [1]

Para a camada da esquerda:

$$m = \frac{F(h)}{F(h) - F(0)} = \frac{-0.75i}{0.75i - 0} = 1 \quad (2.89)$$

Para a próxima camada do secundário:

$$m = \frac{-1.5i}{-1.5i - (0.75i)} = 2 \quad (2.90)$$

Para o primário:

$$m = \frac{-1.5i}{-1.5i - (0.5i)} = 1.5 \quad (2.91)$$

Para camada central:

$$m = \frac{0.5i}{0.5i - (0.5i)} = 0.5 \quad (2.92)$$

A perda total nos enrolamentos é somando todas as perdas para cada camada.

### 2.3.8 Enrolamentos intervalados

Enrolamentos intervalados podem reduzir as perdas de proximidade, quando as correntes do primário e secundário estão em fase. Existe uma grossura para a qual em  $\phi=1$  as perdas são mínimas. É vantajoso minimizar o número de camadas e intervalar os enrolamentos. A quantidade de cobre perto de zonas de enrolamentos com grande MMF deve ser mantida no mínimo. Geometrias que maximizam  $l_w$  e minimizam o número de camadas levam a perdas de proximidade reduzidas.

## 2.4 Tipos de circuitos magnéticos

São usados diversos tipos de elementos magnéticos em aplicações de potência[8]. Alguns fatores são restritivos no desenho do aparelho magnético. O máximo fluxo de densidade não pode saturar o núcleo, a densidade de fluxo AC de pico deve ser pequena para termos baixas perdas nos núcleos. O fio de cobre deve ser de tamanho reduzido para o conseguirmos encaixar no núcleo. A secção deve ser grande para minimizar resistência DC (perdas de cobre). Se o fio for grosso isto aumenta as perdas de proximidade. O entre-ferro (*air gap*) é necessário quando o elemento armazena energia.

### 2.4.1 Filtro Indutor

Este filtro é usado nos conversores abaixadores de tensão (figuras 2.52, 2.53 e 2.54).

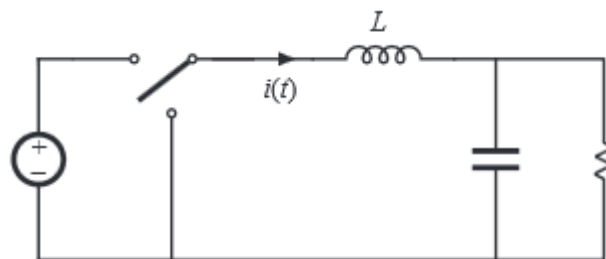


Figura 2.52: Conversor abaixador com filtro indutor, modificado a partir de [1]

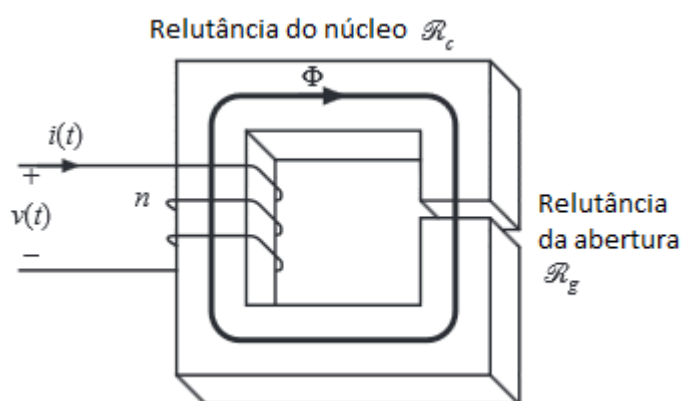


Figura 2.53: Estrutura de filtro indutor, modificado a partir de [1]

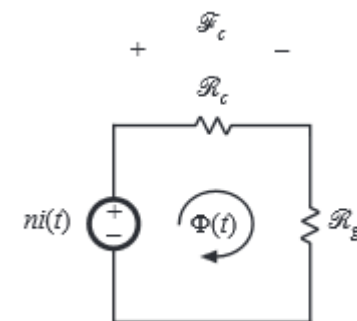


Figura 2.54: Circuito magnético equivalente de um filtro indutor, modificado a partir de [1]

A força do campo magnético do núcleo  $H_c(t)$  é dada por:

$$H_c(t) = \frac{ni(t)}{l_c} \frac{R_c}{R_c + R_g} \quad (2.93)$$

De seguida podemos observar a característica B-H é demonstrada na figura 2.55.

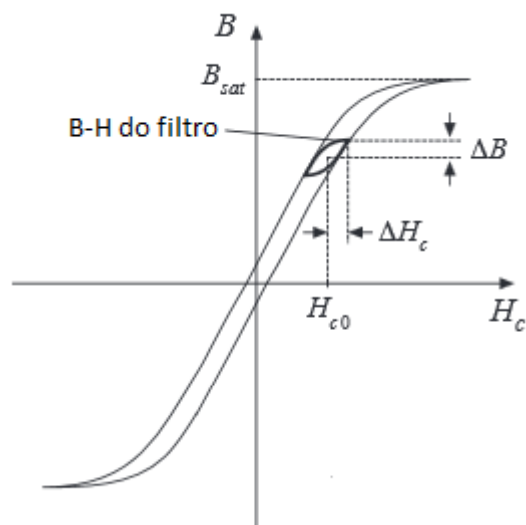


Figura 2.55: Curva B-H do filtro indutor, modificado a partir de [1]

### 2.4.2 Indutor AC

São usados em conversores ressonantes (figura 2.56). Têm grandes variações de corrente (alta frequência).

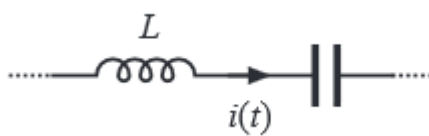


Figura 2.56: Circuito do tanque ressonante LC, modificado a partir de [1]

Com a característica B-H demonstrada na figura 2.57.

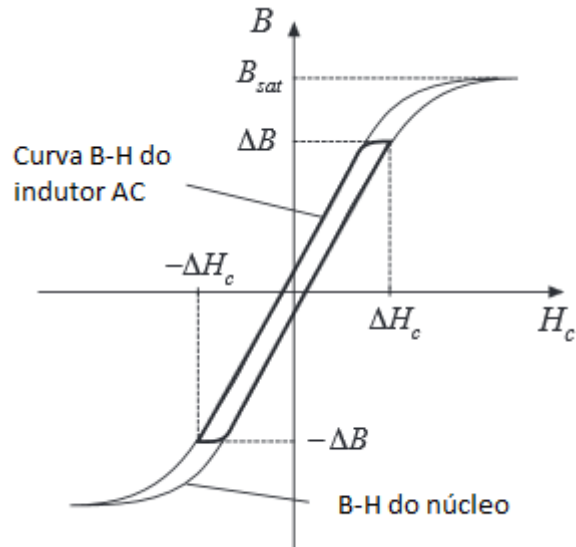


Figura 2.57: Curva B-H do indutor AC, modificado a partir de [1]

### 2.4.3 Transformador

Na figura 2.58 a magnetização do núcleo é modelada por  $L_M$ .

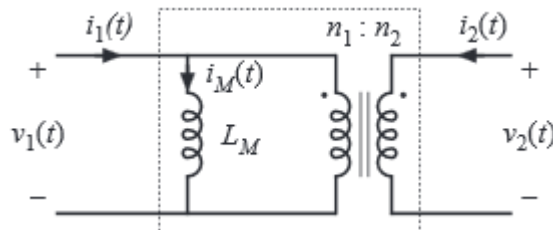


Figura 2.58: Circuito equivalente de um transformador convencional, modificado a partir de [1]

O campo magnético do núcleo:

$$H(t) = \frac{ni_M(t)}{l_m} \quad (2.94)$$

A corrente de magnetização  $i_M(t)$  não depende diretamente de  $i_1(t)$  ou  $i_2(t)$ , mas sim da tensão  $v_1(t)$  no enrolamento.

Com a característica B-H demonstrada na figura 2.59.

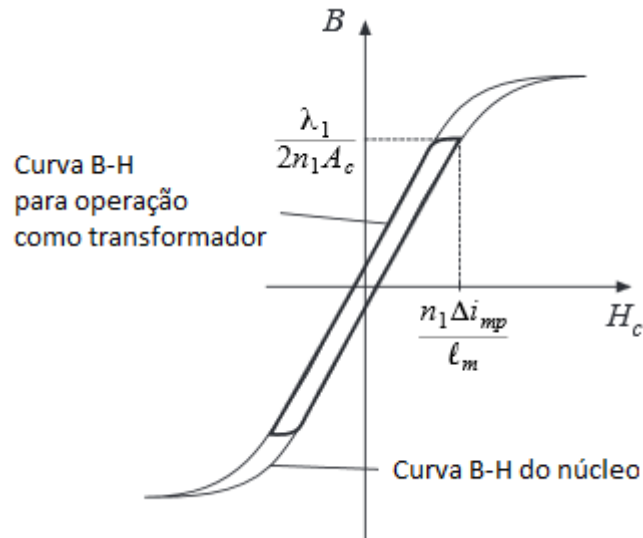


Figura 2.59: Curva B-H do transformador, modificado a partir de [1]

#### 2.4.4 Indutor acoplado

Um indutor acoplado é um filtro com vários enrolamentos (figura 2.60).

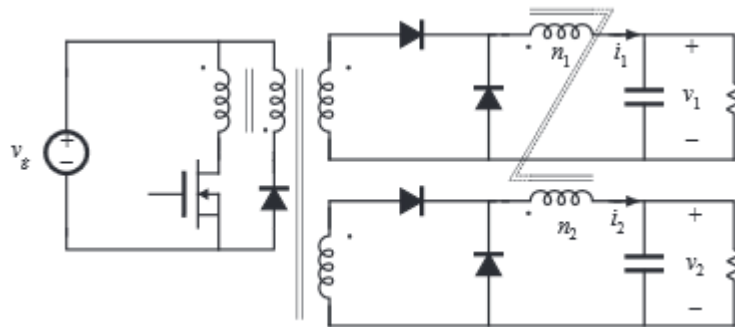


Figura 2.60: Circuito equivalente de acoplamento de filtros indutores de dois conversores foward, modificado a partir de [1]

O campo magnético do núcleo:

$$H_c(t) = \frac{i_1(t)n_1 + i_2(t)n_2}{l_c} = \frac{R_c}{R_c + R_g} \quad (2.95)$$

Com a característica B-H demonstrada na figura 2.61.



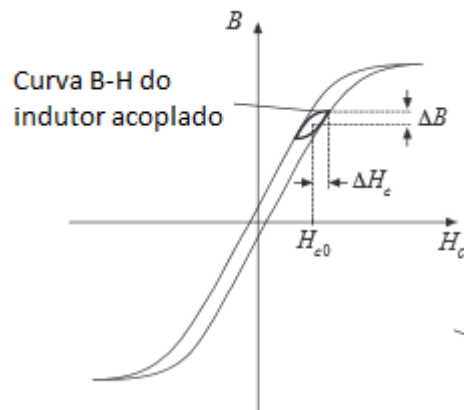


Figura 2.61: Curva B-H do indutor acoplado, modificado a partir de [1]

### 2.4.5 Transformador Flyback

Um transformador *Flyback* é um transformador que funciona como um indutor com 2 enrolamentos. O primário é usado durante o intervalo de condução do *mosfet* e o secundário é usado durante o intervalo de condução do diodo (figura 2.62).

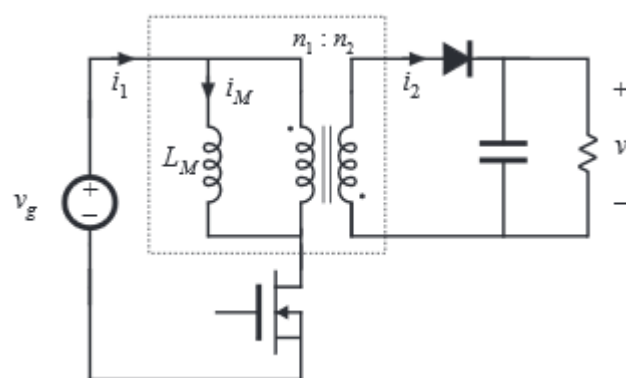


Figura 2.62: Circuito equivalente do transformador *flyback*, modificado a partir de [1]

Com a característica B-H demonstrada na figura 2.63.

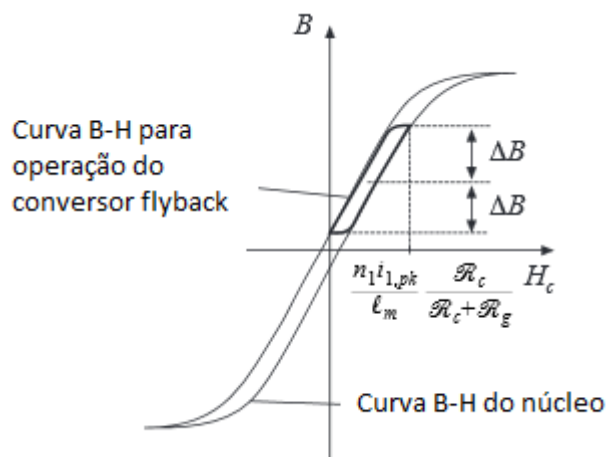


Figura 2.63: Curva B-H de operação do conversor *flyback*, modificado a partir de [1]

## 2.5 Ferramenta de desenho de aparelhos magnéticos

- **GeckoMAGNETICS**: ferramenta que possibilita desenho de componentes de potência magnéticos tais como indutores e transformadores[9]. Funciona para uma grande variedade de potências e para todo o tipo de materiais de núcleo, sendo que também funciona para vários tipos de enrolamentos (*Litz* e *Foil*). Este software é muito completo sendo que considera vários tipos de perdas (proximidade e efeito pelicular), o que nos permite um desenho bastante robusto do transformador.
- **QuickField**: É uma ferramenta de simulação de campos magnéticos[16]. Tem uma interface um pouco antiquada. Nesta opção desenvolvemos testes de mecanismos de transferência de calor, testes de stress mecânicos nos enrolamentos, cálculos de perdas, correntes de *Foucault*, forças magnéticas assim como análise de transitórios magnéticos.
- **FEMM**: Ferramenta grátis que permite visualizar linhas de campo assim como ter acesso a várias perdas dos transformadores[17]. Interface apelativa e fácil de usar. Funciona numa perspectiva de análise a 2 dimensões.
- **Magnetics**: É uma ferramenta que permite desenhar componentes magnéticos, em especial indutores, filtros de modo comum e transformadores de corrente[13]. O software não é grátis.
- **PowerEsim**: Ferramenta online que permite desenhar transformadores usados para vários circuitos de comutação isolados[18].

Como todas estas ferramentas, e sabendo o tipo de perdas que é necessário minimizar para se atingir uma maior eficiência no transformador será desenvolvido um método que nos possibilite esse mesmo fim.

## Capítulo 3

# Caracterização multifísica de um transformador de média frequência

### 3.1 Introdução

Neste capítulo apresentam-se as principais características que influenciam o desenho de transformadores.

O transformador é ideal se o acoplamento magnético for perfeito e não houver perdas de energia [19][20]. No entanto isso não é possível uma vez que tanto o cobre dos enrolamentos como o ferro do núcleo apresentam perdas de funcionamento.

Este terceiro capítulo introduz várias equações para a caracterização das perdas no núcleo e enrolamentos, assim como uma breve explicação do modelo térmico 3.1.3.

É importante ter em atenção que no projeto do desenho de transformadores existem três problemas fundamentais que se incluem no desenho, e que requerem modelação:

- **Modelos para perdas do núcleo:** Serão apresentadas as equações de *Steinmetz* que nos ajudam a perceber o comportamento do núcleo do transformador quando excitado [21][22][10][23][24].
- **Modelos para perdas dos enrolamentos:** Serão discutidos modelos para modelação das perdas em enrolamentos[25][26], com algum foco para perdas em fio Litz [27][22][28][29].
- **Modelo para comportamento térmico:** Importante para ter uma ideia do comportamento térmico do transformador (saber os pontos quentes, temperatura máxima de funcionamento, etc...)[30][22][10].

#### 3.1.1 Perdas núcleo

Existem diversas abordagens na literatura que lidam com determinação de perdas do núcleo. Temos três ramos principais: modelos de histerese , abordagem de perdas de separação e métodos empíricos .

- **Modelos de histerese** - modelos de histerese são geralmente baseados em modelos de *Jiles-Atherton* ou *Preisach* [10]. O primeiro baseia-se num cálculo de energia a nível macroscópico. O segundo modelo introduz uma abordagem estatística para a descrição da distribuição de tempo e espaço no seguimento do problema.
- **Abordagem de perdas de separação** - Abordagem que assume que três efeitos diferentes contribuem para perdas de magnetização. Perdas estáticas de histerese, perdas de correntes de *Foucault* e perdas adicionais [19].
- **Métodos empíricos** - Baseiam-se na equação de *Steinmetz* [31][10].

Os modelos de histerese e a abordagem de perdas de separação requerem poder de processamento computacional elevado. Por sua vez, métodos empíricos por sua vez não requerem [10].

*Steinmetz* [31] introduziu esta equação para caracterizar a perda de densidade magnética  $P_v$

$$P_v = \eta B_m^\beta \quad (3.1)$$

Onde  $\beta$  e  $\eta$  são determinadas pelas características do material, e  $B_m$  é o valor de pico de indução magnética

Atualmente, é usada uma expressão conhecida como equação original de *Steinmetz*, ou original *Steinmetz* equation em inglês, representada por OSE:

$$P_v = K f^\alpha B_m^\beta \quad (3.2)$$

Onde  $K$  e  $\alpha$  são determinados pelas características do material e  $f$  é a frequência da onda. Esta expressão só é válida para formas de onda sinusoidal. E formas de onda não sinusoidais podem ter muitas mais perdas que formas de onda sinusoidais.

Com o aumento de sistemas de eletrónica de potência e devido ao facto de haver poucas expressões que lidem com formas ondas não sinusoidais foi introduzida uma modificação á equação original de *Steinmetz*, modified *Steinmetz* expression ou em português equação modificada de *Steinmetz* ou MSE:

$$P_v = (K f_{eq}^{\alpha-1} B_m^\beta) f_r \quad (3.3)$$

Esta expressão substitui o parâmetro  $f$  (frequência) da OSE com um parâmetro equivalente  $f_{eq}$ .  $\Delta B$  refere-se á indução magnética de pico e  $f_r$  é a frequência fundamental da onda.

$$f_{eq} = \frac{2}{\Delta B^2 \pi^2} \int_0^T \left( \frac{dB(t)}{dt} \right)^2 dt \quad (3.4)$$

Foi posteriormente introduzida a equação generalizada de *Steinmetz* (generalized *Steinmetz* equation ou GSE) devido a uma incompatibilidade entre a OSE e a MSE para formas de onda sinusoidal. A GSE considera a mudança de indução magnética e também o seu valor instantâneo.

Assim a equação generalizada de *Steinmetz* ou GSE é representada por:

$$P_v = \frac{1}{T} \int_0^T k_1 \left( \frac{dB(t)}{dt} \right)^\alpha |B(t)|^{\beta-\alpha} dt \quad (3.5)$$

Com:

$$k_1 = \frac{K}{(2\pi)^{\alpha-1} \int_0^{2\pi} |\cos\theta|^\alpha |\sin\theta|^{\beta-\alpha} d\theta} \quad (3.6)$$

O ângulo  $\theta$  representa a fase da onda sinusoidal.

A reação do material a certas variações magnéticas varia dependendo do seu histórico. Para combater este facto, foi expressa a equação generalizada de *Steinmetz* melhorada, ou em inglês *improved general Steinmetz equation* (iGSE), que basicamente substituiu o valor instantâneo da indução magnética pelo ser valor de pico. Desta forma, não só a derivada e o valor instantâneo são tidos em conta, como também o histórico do material. Assim a expressão melhorada da GSE, a iGSE, pode ser expressa por

$$P_v = \frac{1}{T} \int_0^T k_1 \left( \frac{dB(t)}{dt} \right)^\alpha (\Delta B)^{\beta-\alpha} dt \quad (3.7)$$

Com:

$$k_1 = \frac{K}{(2\pi)^{\alpha-1} \int_0^{2\pi} |\cos\theta|^\alpha |\sin\theta|^{\beta-\alpha} d\theta} \quad (3.8)$$

Pouco depois da iGSE foi publicada a extensão natural de *Steinmetz*, ou *natural Steinmetz equation* (NSE):

$$P_v = \left( \frac{\Delta B}{2} \right)^{\beta-\alpha} \frac{k_N}{T} \int_0^T \left| \frac{dB(t)}{dt} \right|^\alpha dt \quad (3.9)$$

Com

$$k_N = \frac{K}{(2\pi)^{\alpha-1} \int_0^{2\pi} |\cos\theta|^\alpha d\theta} \quad (3.10)$$

A abordagem ciclo elíptica equivalente, ou *equivalent elliptical loop* (EEL) baseia-se na definição de uma expressão para a componente irreversível de um campo magnético  $H_{irr}$ , a componente de perdas magnéticas. A componente irreversível comparada á indução magnética descreve um ciclo elíptico. Temos as componentes da elipse:

$$B = B_m \sin(\theta) \quad (3.11)$$

$$H_{irr} = H_m \cos(\theta) \quad (3.12)$$

Igualando a superfície da elipse e a equação de perdas de *Steinmetz* para o caso sinusoidal, a definição de o componente irreversível pode ser encontrada com base na indução magnética. A expressão de perdas será então:

$$p_v(t) = |C| \left| \frac{dB(t)}{dt} \right|^\alpha \quad (3.13)$$

Com:

$$C = \pm \frac{1}{C_{\alpha\beta}} K |B_m \cos(\theta)|^{\beta-\alpha} \quad (3.14)$$

$$C_{\alpha\beta} = \frac{2}{\pi} (2\pi)^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\beta(\theta) d\theta \quad (3.15)$$

Por fim temos a equação de *Steinmetz* para um coeficiente de forma de onda, ou em inglês, *waveform coefficient Steinmetz equation* (WCSE). É um método que tenta relacionar formas de onda não sinusoidais com formas sinusoidais com o mesmo pico de indução magnética, através do cálculo de área de forma de onda da indução.

$$P_v = FWCK f^\alpha B_m^\beta \quad (3.16)$$

Tabela 3.1: Expressões de perdas do núcleo para diferentes métodos [10]

Método	Expressão
OSE	$P_v = K f^\alpha B_m^\beta$
MSE	$P_v = \frac{1}{T} \int_0^T k_1 \left  \left( \frac{dB(t)}{dt} \right)^\alpha \right   B(t) ^{\beta-\alpha} dt$
iGSE	$P_v = \frac{1}{T} \int_0^T k_1 \left  \frac{dB(t)}{dt} \right ^\alpha (\Delta B)^{\beta-\alpha} dt$
NSE	$P_v = \left( \frac{\Delta B}{2} \right)^{\beta-\alpha} \frac{k_N}{T} \int_0^T \left  \frac{dB(t)}{dt} \right ^\alpha dt$
EEL	$P_v(t) =  C  \left  \frac{dB(t)}{dt} \right ^\alpha$
WcSE	$P_v = FWCK f^\alpha B_m^\beta$

### 3.1.2 Perdas enrolamentos

Ao trabalhar com altas frequências são usados fios *Litz* para minimizar perdas cobre. Quando um fio *litz* conduz correntes existem efeitos peliculares e proximidade que causam não-uniformidade na distribuição de corrente.

No que respeita às perdas dos enrolamentos, podemos dividir os métodos de cálculos de perdas para fios *Litz* em métodos numéricos e métodos analíticos.

- **Métodos numéricos** - Requerem muito tempo apesar de terem bons resultados.
- **Métodos analíticos** - Cálculo de perdas usando matriz de permeabilidade do condutor, aproximação de *Dowell's* [25] e aplicação de perdas de um fio de *Litz* ao enrolamento inteiro (Modelo de *Tourkhani* [22]).

Modelo de *Tourkhani* é adotado e a sua aproximação para  $r_0 \leq \delta$

$$P_{w,m} = R_{dc} \cdot I_{rms}^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{\pi^2 N_0 \beta}{3 \cdot 2^6} (16m^2 - 1 + \frac{24}{\pi^2}) \cdot \left( \frac{r_0}{\delta} \right)^4 \right\} \quad (3.17)$$

$$R_{dc} = \frac{MLT_w N}{\pi \sigma r_0^2 N_0} \quad (3.18)$$

Segundo [32] podemos considerar as perdas nos enrolamentos como:

$$P_{cu} = \sum RI^2 = p_w \sum_{i=1}^n \frac{N_i MLT (JA_{wi})^2}{A_{wi}} \quad (3.19)$$

- $p_w$  é a resistividade do condutor.
- Volume dos enrolamentos  $V_w = MLT * W_a$ .
- Volume de condução  $= V_w * k_u$ .

$$P_{cu} = p_w V_w k_u J^2 \quad (3.20)$$

Tendo portanto assim as perdas relacionas com as características geométricas do condutor.

Há também a possibilidade de relacionar as perdas nos enrolamentos com a temperatura[33]:

$$P_w(T) = P_{wdc}(T_o) A_{To} \sqrt{[1 + \alpha(T - T_o)]} F(A_T) \quad (3.21)$$

Onde:

- $P_w(T)$  - Perdas a uma temperatura T.
- $P_{wdc}$  - Perdas a uma temperatura  $T_o$  (temperatura da sala)
- $\alpha$  - coeficiente de temperatura no condutor

### 3.1.3 Modelo térmico

O modelo térmico é um fator importante no que respeita ao desenho de transformadores. Tendo por base que a mudança de temperatura no transformador pode influenciar as características do mesmo é importante saber modelar essa mesma mudança. Resistência térmica pode ser estimada por modelos teóricos ou empíricos. Alguns autores sugerem que uma equação empírica pode ser utilizado como uma primeira aproximação da resistência térmica dos núcleos de ferrite. Existe uma grande variedade de modelos dependente do mecanismo de transferência de calor.

De seguida podemos ver um exemplo de uma equação tendo por base modelos empíricos [22]:

$$R_{th} = \frac{1}{1^{1.34} \cdot V_c^{0.52}} \approx \frac{0.0457}{\sqrt{V_c}} \quad (3.22)$$

Se o valor do volume do núcleo é utilizado em  $cm^3$ , em seguida, a resistência térmica pode ser calculada em (K/W)

$$R_{th} = 53(V_{nucleo})^{-0.54} \quad (3.23)$$

As perdas combinadas dos enrolamentos e do núcleo precisam de ser dissipadas pela superfície transformador. O mecanismo dominante de transferência de calor é convecção. De seguida

veremos a equação de Newton:

$$P = hA_t\Delta T \quad (3.24)$$

Onde  $\Delta T$  é a subida de temperatura,  $h$  é o coeficiente de transferência de calor e  $P$  é a soma das perdas de enrolamentos e núcleo.

Resistência térmica  $R_\theta$

$$\Delta T = R_\theta P \quad (3.25)$$

A resistência térmica é portanto o paralelo das perdas dos enrolamentos e núcleo.

$$\frac{1}{R_\theta} = \frac{1}{R_{\theta, cu}} + \frac{1}{R_{\theta, fe}} = hA_t \quad (3.26)$$

Onde  $h$  e  $A_t$  são os valores equivalentes para um transformador tratado como uma única unidade.

Para convecção natural do ar  $h$  é função da altura  $H$  do transformador

$$h = 1.42 \left[ \frac{\Delta T}{H} \right]^{0.25} \quad (3.27)$$

Os valores de resistência térmica das principais formas de núcleo para transformadores de ferrite, arrefecido por convecção natural ao ar (sem arrefecimento forçado) são apresentados nas tabelas abaixo. Dados empíricos fornecidos por *Epcos* 3.1 sugerem que na primeira aproximação a resistência térmica é proporcional ao inverso da raiz quadrada do volume do núcleo de ferrite.

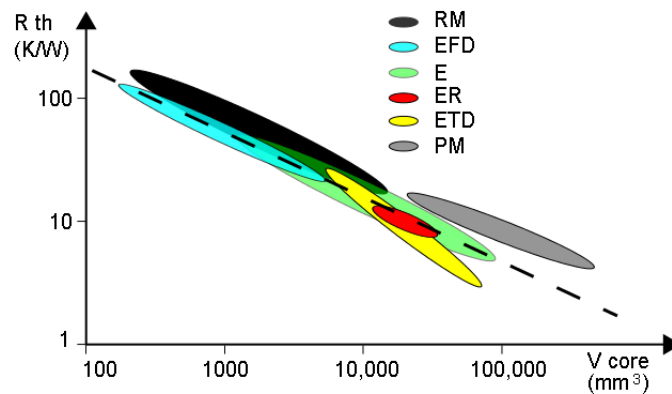


Figura 3.1: Resistência térmica de núcleos de ferrites, [3]



## Capítulo 4

# Desenvolvimento e Implementação da ferramenta

### 4.1 Introdução

Neste capítulo são descritas todas as matérias necessárias ao desenvolvimento e implementação da ferramenta de desenho de transformadores que foi objeto de dissertação. São introduzidos de forma resumida dois algoritmos na secção 4.2 de desenho de transformadores implementados, bem como os algoritmos de otimização necessários na secção 4.3 para chegar a resultados, os modelos de transformadores 4.4 estudados bem como o resultado final do sistema 4.5 e a sua arquitetura.

### 4.2 Métodos de desenho de transformadores

Na literatura encontram-se diversos métodos de projeto de transformadores, sendo em geral aceite a possibilidade de os classificar em duas classes:

- **Metodologias iterativas:** métodos em que se fazem diversas tentativas de resolução do problema até se atingir as características de desempenho consideradas aceitáveis. Um exemplo é um método proposto em [8];
- **Metodologias analíticas:** métodos que têm por base uma resolução de um sistema que levará à solução do problema. Um exemplo é o método de projeto apresentado por [22];

#### 4.2.1 Algoritmo iterativo

Este algoritmo apresentado em [8] é bastante conhecido, sendo reconhecido como um bom ponto de partida para o desenho de transformadores. De seguida é apresentado o diagrama 4.1 com o algoritmo base implementado na ferramenta.

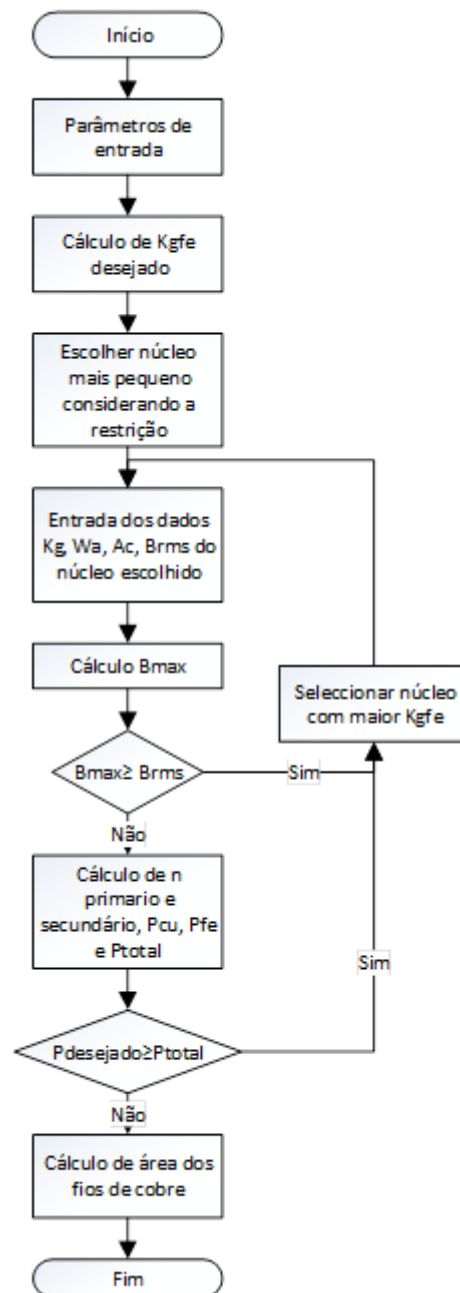


Figura 4.1: Diagrama principal do algoritmo de desenho de transformadores

Para projetar um transformador com  $k$  saídas (figura 4.2), a indutância de magnetização assume-se muito elevada. Perdas de cobre e de núcleo também são considerados na conceção. Processo de projeto é baseado na otimização da soma das perdas do núcleo e perdas de cobre ( $P_{tot}$ ) e escolhendo densidade de fluxo ótimo. O projeto baseia-se em  $K_{gfe}$  que é explicado de seguida:

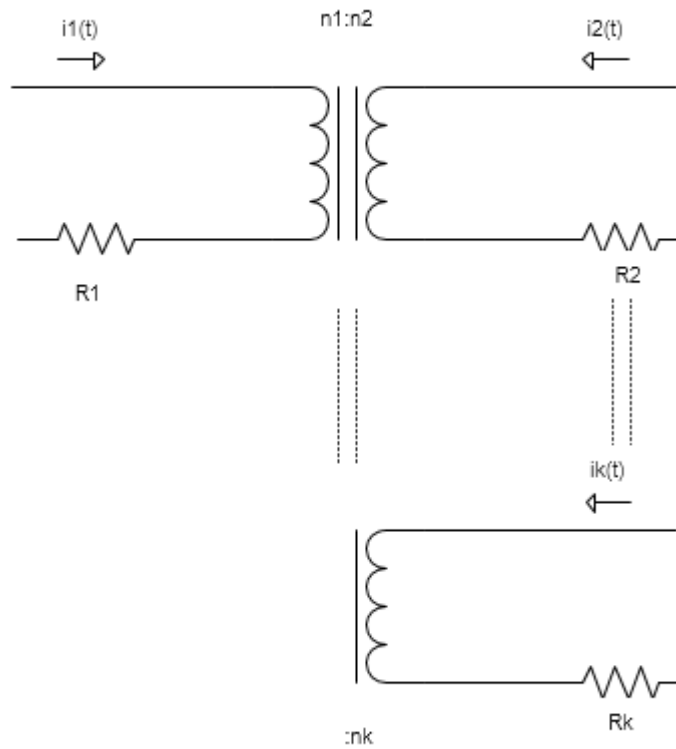


Figura 4.2: Transformador com k saídas

#### 4.2.1.1 Otimização do fator de janela do núcleo

Os valores rms da corrente de saída do transformador é determinada pela intensidade da corrente da carga. O fator de enrolamento ( $\alpha$ ) é definido como:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1 \quad (4.1)$$

em cada  $\alpha_k$  respeita a condição

$$0 < \alpha_i < 1 \quad (4.2)$$

a Potência total de perdas é dada por:

$$P_{tot} = P_{cu1} + \dots + P_{cuk} \quad (4.3)$$

$$\frac{\rho(MLT)}{A_w k_u} \sum_{j=1}^k \frac{n_j^2 I_j^2}{\alpha_j} \quad (4.4)$$

onde  $A_w$  é a área de janela e  $k_u$  é o fator de enchimento,  $\rho$  é a resistividade do fio, MLT é o comprimento médio por espira. Para otimizar  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$  o método dos multiplicadores de

Lagrange é usado [4]:

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = 1 - \sum_{j=1}^k \alpha_j \quad (4.5)$$

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \varepsilon) = P_c u(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) + \varepsilon \cdot g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \quad (4.6)$$

Onde  $f$  é a função objetivo e  $g$  é a restrição e  $\varepsilon$  o multiplicador de *Lagrange*. Derivando esta ultima equação com respeito a todas as variáveis conseguimos encontrar as seguintes equações.

$$\varepsilon = \frac{\rho(MLT)}{A_w k_u} \left( \sum_{j=1}^k n_j I_j \right)^2 = P_{cu,tot} \quad (4.7)$$

onde  $P_{cu,tot}$  representa as perdas totais nos enrolamentos.

$$\alpha_m = \frac{n_m I_m}{\sum_{j=1}^{\infty} n_j I_j} \quad (4.8)$$

$$\frac{n_m}{n_j} = \frac{V_m}{V_j} \quad (4.9)$$

$$\alpha_m = \frac{V_m I_m}{\sum_{j=1}^{\infty} V_j I_j} \quad (4.10)$$

Onde  $V_m I_m$  é a potência aparente do enrolamento  $m$  e  $\sum_{j=1}^{\infty} V_j I_j$  é a soma das potências aparentes comutadas.

As **perdas de cobre** podem ser obtidas por:

$$P_{cu} = \frac{\rho(MLT)n_1^2 I_{tot}^2}{A_w k_u} \quad (4.11)$$

$$I_{tot} = \sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n_1} I_j \quad (4.12)$$

$$P_{cu} = \left( \frac{\rho \lambda_1^2 I_{tot}^2}{k_u} \right) \left( \frac{MLT}{A_w A_c^2} \right) \left( \frac{1}{B_{max}^2} \right) \quad (4.13)$$

onde  $\lambda_1$  representa a tensão por segundo aplicada ao primário e  $A_c$  representa a secção do núcleo.

O primeiro parêntesis corresponde às características elétricas, o segundo às características do núcleo e por fim o terceiro corresponde às perdas do núcleo.

#### 4.2.1.2 Perdas do núcleo

Escolher materiais com alto  $B_{sat}$  leva a uma redução no tamanho e no preço, mas perdas maiores. Entre diferentes materiais as ferrites têm  $B_{sat}$  baixo ( $0.2T < B_{sat} < 0.5T$ ). Logo a relutância

do seu núcleo é maior que noutros materiais, logo, tem menos perdas por correntes de *Foucault*. Estes materiais têm frequências de vários milhares de hertz até 1 milhão de hertz para operar bem.

Densidade de perdas de potência é função de  $B_{max,ac}$  para diferentes valores de frequência para excitação sinusoidal. Para um valor específico de frequência as perdas do núcleo  $P_{fe}$  são:

$$P_{fe} = k_{fe} B_{max}^{\beta} A_c l_m \quad (4.14)$$

onde  $\beta$  simboliza o coeficiente de perdas no núcleo.

O coeficiente geométrico  $K_{fe}$  depende da temperatura no núcleo e de  $B_{max}$  que pode ser aumentado através do aumento da frequência. A dependência de  $K_{fe}$  com a frequência pode ser vista como:

$$k_{fe}(f_{max}) = k_{fe0} \left[ 1 + \alpha_1 \frac{f_{max}}{f_0} + \alpha_2 \left( \frac{f_{max}}{f_0} \right)^2 + \dots + \alpha_n \left( \frac{f_{max}}{f_0} \right)^n \right] \quad (4.15)$$

A densidade de fluxo máxima é ótima quando as perdas totais no núcleo  $P_{tot}$  são minimizadas. Portanto a densidade ótima de fluxo é um ponto onde a soma de perdas de cobre e núcleo é igual. Nesse ponto  $B_{max}$  é ótima, logo podemos escrever as seguintes equações:

$$P_{tot} = P_{fe} + P_{cu} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial P_{tot}}{\partial B_{max}} = \frac{\partial P_{fe}}{\partial B_{max}} + \frac{\partial P_{cu}}{\partial B_{max}} = 0 \quad (4.17)$$

$$B_{max} = \left[ \frac{\rho \lambda_1^2 I_{tot}^2}{2k_u} \cdot \frac{MLT}{A_w A_c^3 L_m} \frac{1}{\beta k_{fe}} \right]^{\left( \frac{1}{\beta+2} \right)} \quad (4.18)$$

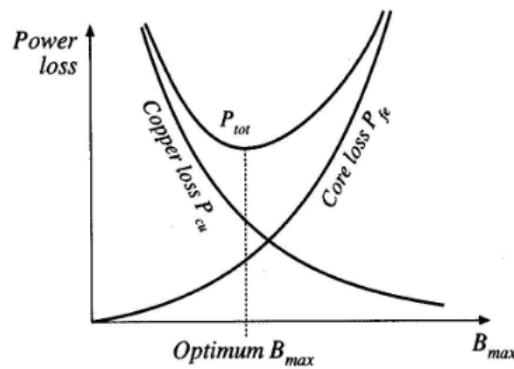


Figura 4.3: Selecionando a densidade de fluxo ótima a partir das perdas de enrolamentos e núcleo, retirado de [4]

Na figura 4.3 podemos ver o ponto para a densidade de fluxo ótima.

As perdas do núcleo podem ser calculadas por:

$$P_{tot} = [A_c L_m k_{fe}]^{(\frac{2}{\beta+2})} \cdot [\frac{\rho \lambda_1^2 I_{tot}^2}{4k_u} \cdot \frac{MLT}{A_w A_c^3}]^{\frac{\beta}{\beta+2}} \cdot [(\frac{\beta}{2})^{-(\frac{\beta}{\beta+2})} + (\frac{\beta}{2})^{(\frac{\beta}{\beta+2})}] \quad (4.19)$$

$$k_{gfe} = \frac{A_w A_c^{(\frac{2(\beta-1)}{\beta})}}{MLT [L_m^{(\frac{2}{\beta})}]} [(\frac{\beta}{2})^{-(\frac{\beta}{\beta+2})} + (\frac{\beta}{2})^{(\frac{\beta}{\beta+2})}]^{-(\frac{\beta}{\beta+2})} \quad (4.20)$$

$$k_{gfe, desejado} = \frac{\rho \lambda_1^2 I_{tot}^2 k_{fe}^{(\frac{2}{\beta})}}{4k_u P_{tot}^{(\frac{\beta+2}{\beta})}} \quad (4.21)$$

Para selecionar o núcleo a seguinte restrição tem que ser satisfeita:

$$k_{gfe} \geq k_{gfe, desejado} \quad (4.22)$$

Como podemos ver,  $\beta$  afeta o cálculo de  $K_{gfe}$ , mas devido à baixa variação de  $\beta$  ( $2.6 < \beta < 2.8$ ), o valor de tolerância de  $K_{gfe}$  vai ser pequeno.

$K_{fe}$  é função da frequência que tem impacto no valor de  $K_{gfe}$  e no tamanho do núcleo também. Para obter frequência ótima a equação acima é derivada com respeito à frequência e à densidade de fluxo. Então,  $B_{max}$  e  $f_{max}$  são calculados:

$$\frac{\partial P_{tot}}{\partial f_{max}} = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial P_{tot}}{\partial B_{max}} = 0 \quad (4.24)$$

Se  $K_{fe}$  é igual, os valores de frequência ótima vão ser raízes da função  $F$ :

$$F = 1 + \alpha_1 \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right) \frac{f_{max}}{f_0} + \alpha_2 \left(\frac{\beta-2}{\beta}\right) \left(\frac{f_{max}}{f_0}\right)^2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\beta-n}{\beta}\right) \left(\frac{f_{max}}{f_0}\right)^n \quad (4.25)$$

Uma das principais perdas em fontes comutadas são as perdas de comutação, que aumentam com o aumento da frequência. Assim, nestes dispositivos, a frequência ótima não pode ser utilizada (que é determinada com base na perda e redução do tamanho do núcleo). A relação entre a densidade de fluxo e fluxo de fugas e o numero de espiras é:

$$B_{max} = \frac{\lambda_1}{2n_1 A_c} \quad (4.26)$$

$B_{max}$  pode conter valor DC que não tem efeito nas perdas do núcleo. Área do fio de cobre pode ser calculada através de:

$$A_{w1} = \frac{k_u A_w \alpha_1}{n_1} \quad (4.27)$$

Para diminuir as perdas por efeito pelicular, várias séries de fios paralelos têm sido geralmente utilizado. Cada diâmetro série é escolhido considerando efeito pelicular característico.

#### 4.2.2 Algoritmo analítico

Nesta secção apresenta-se um dos métodos analíticos recentemente publicado em literatura[22], o qual foi objeto de estudo. A figura 4.4 mostra o algoritmo analítico implementado, onde  $a$  representa uma constante geométrica do núcleo e  $V_e$  representa o volume do mesmo.

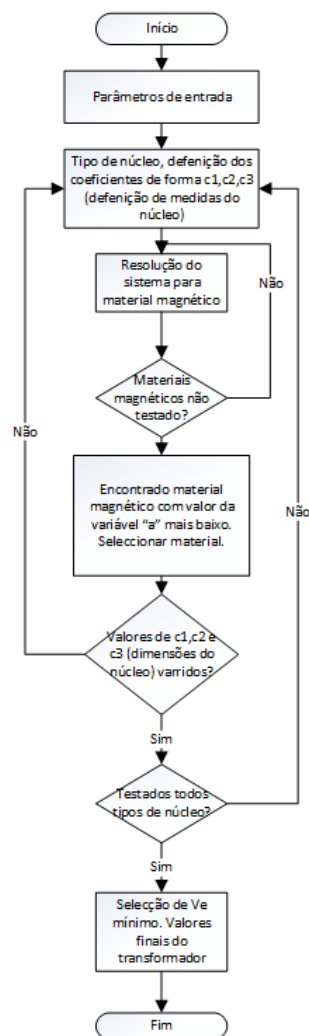


Figura 4.4: Diagrama de algoritmo alternativo de desenho de transformadores

Este algoritmo começa por considerar algumas restrições de projeto:

- 1ª Lei de Faraday

$$V_{rms} = 4k_{sh}nfB_pA_c \quad (4.28)$$

onde  $k_{sh}$  representa o fator de forma de onda,  $n$  o número de espiras,  $B_p$  a amplitude da indução magnética,  $f$  a frequência e  $A_c$  a secção do núcleo magnético.

- **2ª Limite térmico**

$$R_{th} \cdot P_t \leq \Delta\tau_{max} \quad (4.29)$$

onde  $R_{th}$  representa a resistência térmica equivalente do transformador,  $P_t$  representa as perdas totais e  $\Delta\tau_{max}$  representa a variação máxima permitida de temperatura.

- **3ª Rácio entre numero de espiras entre primário e secundário**

$$N = \frac{n_p}{n_s} \quad (4.30)$$

onde  $N$  é o rácio entre o número de espiras do primário ( $n_p$ ) e do secundário ( $n_s$ ).

Estas restrições são fundamentais para o desenho de transformador e permitem a definição de limites no que respeita à entrada de parâmetros no algoritmo.

#### 4.2.2.1 Perdas no núcleo

As perdas de núcleo podem ser estimadas pela equação de *Steinmetz*:

$$P_c = K_1 a^3 B_p^y \quad (4.31)$$

onde  $a$  é o fator dimensional e  $y$  é um coeficiente de perdas dado pelo fabricante. Com:

$$K_1 = 1000 k_{mag} \cdot C_m \cdot f^x \cdot v_c \cdot (c_{t2} \cdot \tau_{ope}^2 - c_{t1} \cdot \tau_{ope} + c_{t0}) \quad (4.32)$$

onde  $k_{mag}$  é o coeficiente de perdas do núcleo dependente da forma de onda,  $C_m$   $y$  e  $x$  são os coeficientes de perdas,  $c_{T1}$ ,  $c_{T2}$  e  $c_{T3}$  e  $v_c$  o volume do núcleo.

$$k_{mag} = \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^{x-1} \cdot \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)^{y-x-1} \quad (4.33)$$

onde  $\theta$  é o período de tensão nula.

#### 4.2.2.2 Perdas nos enrolamentos

No que respeita a perdas nos enrolamentos é preciso considerar se os enrolamentos estão intercalados ou não. De seguida são apresentadas as expressões para as perdas nos enrolamentos.

Para enrolamentos intercalados temos a seguinte expressão:

$$P_w = \frac{K_2}{a^5 B_p^2} \left( \frac{(e_1 r_{0p} + e_2)^2}{\alpha r_{0p}^2} + \frac{(e_1 r_{0s} + e_2)^2}{(1 - \alpha) r_{0s}^2} \right) + \frac{K_3}{a B_p} \left( \frac{r_{0p}^4}{(e_1 r_{0p} + e_2)^2} + \frac{N \cdot r_{0s}^4}{(e_1 r_{0s} + e_2)^2} \right) \quad (4.34)$$

onde  $e_1$  e  $e_2$  são constantes de isolamento de fio *Litz*,  $r_{0p}$  e  $r_{0s}$  são os raios dos fios *Litz* no primário e secundário e  $\alpha$  coeficiente de distribuição de enrolamentos.



As constantes  $K_2$  e  $K_3$  são explicitadas por:

$$K_2 = \frac{V_{prms}^2 \cdot I_{prms}^2}{16 \cdot k_{sh}^2 \cdot \sigma \cdot f^2} \cdot \frac{m l t}{a_c^2 a_w K_d} \quad (4.35)$$

onde  $a_c$  é área do núcleo,  $a_w$  é área do enrolamento e  $K_d$  é constante de enrolamento que modela a redução da área devido a vários fatores (acumulação de espiras, etc).

$$K_3 = \frac{V_{prms} \cdot I_{prms}^2 \cdot f \cdot \sigma \cdot \mu^2}{\sqrt{2} \cdot k_{sh}} \cdot \frac{m l t \cdot K_d}{a_c} \quad (4.36)$$

No caso de enrolamentos não intercalados temos que a potência de perdas é:

$$P_w = \frac{K_{2N}}{a^5 B_p^2} \left( \frac{m l t_p (e_1 r_{0p} + e_2)^2}{\alpha r_{0p}^2} + \frac{m l t_s (e_1 r_{0s} + e_2)^2}{(1 - \alpha) r_{0s}^2} \right) + \frac{K_{3N}}{a^3 B_p^2} \left( \frac{m l t_p \cdot \alpha \cdot r_{0p}^4}{(e_1 r_{0p} + e_2)^2} + \frac{m l t_s (1 - \alpha) \cdot r_{0s}^4}{(e_1 r_{0s} + e_2)^2} \right) + \frac{K_{4n}}{a B_p} \left( \frac{m l t_p \cdot r_{0p}^4}{(e_1 r_{0p} + e_2)^2} + \frac{m l t_s \cdot N \cdot r_{0s}^4}{(e_1 r_{0s} + e_2)^2} \right) \quad (4.37)$$

Com:

$$K_{2,N} = \frac{V_{prms}^2 \cdot I_{prms}^2}{16 \cdot k_{sh}^2 \cdot \sigma \cdot f^2 a_c^2 a_w K_d} \quad (4.38)$$

onde  $\sigma$  é a condutividade elétrica do condutor.

$$K_{3,N} = \frac{V_{prms}^2 \cdot I_{prms}^2 \cdot \pi^2 \cdot \sigma \cdot \mu^2}{48 \cdot k_{sh}} \cdot \frac{K_d \cdot c_1}{a_c^2 \cdot c_2} \quad (4.39)$$

onde  $\mu$  é a permeabilidade magnética do condutor

$$K_{3,n} = \frac{V_{prms} \cdot I_{prms}^2 \cdot f \cdot \sigma \cdot \mu^2 \cdot K_d}{10 \sqrt{3} \cdot k_{sh} \cdot a_c} \quad (4.40)$$

### 4.2.2.3 Função objetivo

A equação para otimizar é:

$$\text{Min } P_t$$

$$\text{s.t } P_t \cdot R_{th} - \Delta \tau_{max} = 0$$

onde  $P_t$  perdas totais que incluem perdas nos enrolamentos e núcleo.

A otimização da função objetivo permite a resolução do sistema e permite-nos saber qual o núcleo mais adequado ao projeto.

$$R_{th} = \frac{0.0457}{v_c^{0.52} \cdot a^{1.56}} \quad (4.41)$$

### 4.3 Métodos de Otimização

De seguida são explicados os principais métodos de otimização que serviram de base para a resolução dos problemas de otimização no desenho de transformadores.

#### 4.3.0.4 Método dos multiplicadores de Lagrange

No que se refere à otimização matemática, o método dos multiplicadores de Lagrange (em homenagem a Joseph Louis Lagrange) é uma estratégia para encontrar os máximos e mínimos locais de uma função sujeitos a restrições de igualdade [34].

Um problema de otimização é habitualmente formulado para maximizar ou minimizar uma função. Na sua formulação podem ser consideradas restrições.

A título de exemplo considere-se o problema de encontrar o valor mínimo da função:

$$\min f(x_1, \dots, x_n) \quad (4.42)$$

Em termos paramétricos o problema de minimização formula-se como:

$$G(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (4.43)$$

Onde  $G = [G_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, G_k(x_1, \dots, x_n) = 0]^T$  é o vetor das restrições.

Função  $F$  de Lagrange é definida na equação seguinte:

$$F(X, \lambda) = f(X) - \lambda G(X) \quad (4.44)$$

onde o vetor de variáveis é:

$$X = [x_1, \dots, x_n] \quad (4.45)$$

e o vetor de multiplicadores de *Lagrange* é:

$$\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n] \quad (4.46)$$

Os pontos extremos de  $F$  e dos multiplicadores de *Lagrange*  $\lambda$  satisfazem.

$$\Delta F = 0 \quad (4.47)$$

Isto é:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{m=1}^k \lambda_m \frac{\partial G_m}{\partial x_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (4.48)$$

$$G(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (4.49)$$

O método dos multiplicadores de Lagrange, o qual define as condições necessárias para a otimização de problemas não lineares com restrições.

De seguida podemos ver uma função 4.5 representada graficamente assim como o problema de otimização (extremos da função).

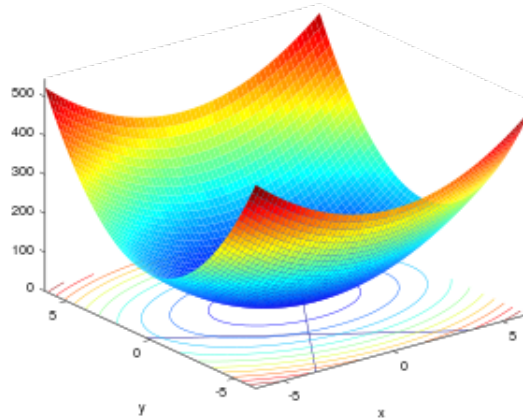


Figura 4.5: Parábola com vários níveis de contorno e 2 linhas de restrições. Retirado de [5]

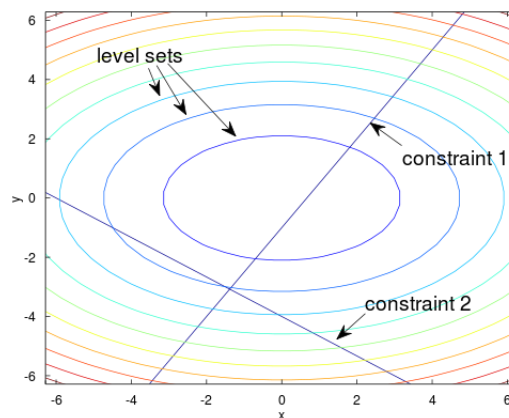


Figura 4.6: Vista mais próxima dos níveis de contorno e restrições. Retirado de [5]

Podemos ver na figura 4.6 que as 2 linhas de restrições se intercetam num ponto. O respetivo ponto na parábola é portanto um mínimo e máximo.

#### 4.3.0.5 Métodos de otimização computacional

Para a resolução de problemas com várias variáveis e com elevado grau de complexidade e dependência é necessário recorrer a ferramentas computacionais [7] que implementam vários métodos de otimização, e que permitem a rápida resolução de problemas complexos de otimização.

Um dos métodos mais conhecidos é denominado, algoritmo de *otimização de Ponto-Interior*.

Algoritmos do ponto-interior permitem lidar com grandes problemas esparsos, bem como pequenos problemas densos.

Métodos de pontos interiores (também conhecidos como métodos de barreira) são uma classe de algoritmos que resolve problemas de otimização convexa lineares e não lineares .

Qualquer problema de otimização convexa pode ser transformado em minimizando (ou maximizar) uma função linear ao longo de um conjunto convexo através da conversão para onde os pontos estão no gráfico ou acima dele.

A abordagem ponto-interior para minimização com restrições é resolver uma sequência de problemas de minimização aproximados. O problema original é:

$$\min_x f(x), \text{ sujeito a } h(x) = 0 \text{ e } g(x) \leq 0 \quad (4.50)$$

Para cada  $\mu > 0$ , o problema aproximado é:

$$\min_{x,s} f_\mu(x,s) = \min_{x,s} f(x) - \mu \sum_i \ln(s_i), \text{ sujeito a } h(x) = 0 \text{ e } g(x) + s = 0 \quad (4.51)$$

Há tantas variáveis  $s_i$  pois há restrições de desigualdade  $g$ . Os  $s_i$  estão restritos a ser positivos para manter  $\ln(s_i)$  delimitada . Como  $\mu$  diminui para zero, o mínimo de  $f_\mu$  deveria aproximar-se do mínimo de  $f$ . O termo logarítmico adicionado é chamado de função de barreira.

Para resolver o problema aproximado, o algoritmo usa um de dois tipos principais de passos em cada iteração, o passo direto em  $(x,s)$  , resolvendo o problema através da aproximação linear, ou o passo do gradiente conjugado com a região de confiança .

Podemos ver na figura 4.7 a solução de um problema com a um algoritmo de ponto interior (algoritmo de *Karmarkar*).

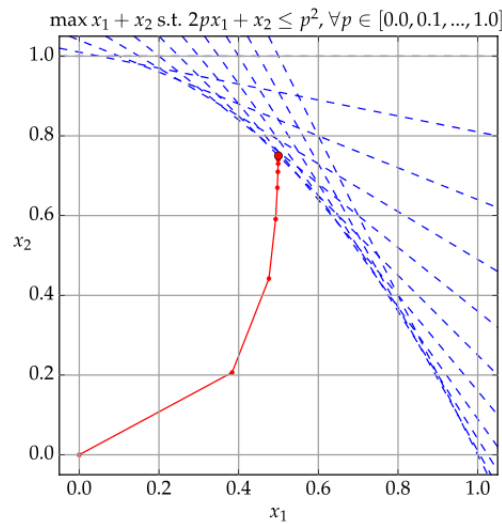


Figura 4.7: Solução através de algoritmo de Karmarkar, retirado de [6]

O algoritmo "trust-region-reflective" é um método de confiança sub-espaco-região e é baseado no método de Newton-reflexivo interior .

Para compreender a abordagem de região de confiança para otimização, é considerado o problema de minimização sem restrições, minimizar  $f(x)$ , onde a função recebe argumentos vetoriais e retorna escalares. A ideia básica é aproximar  $f$  com uma função de  $q$  mais simples, o que razoavelmente reflete o comportamento da função  $f$  em uma zona de proximidade de  $N$  em torno do ponto  $x$ . Esta zona de proximidade é a região de confiança. A etapa de teste  $s$  é calculada através da minimização ao longo de  $N$ . Esta é o subproblema da "trust-region":

$$\min_s(q(s), s \in N) \quad (4.52)$$

O ponto atual é estimado ser  $x + s$  se  $f(x + s) < f(x)$ , caso contrário, o ponto atual mantém-se inalterado e  $N$ , a região de confiança, é reduzido e o passo de cálculo de teste é repetido. As questões chave na definição de uma abordagem de confiança região específica para minimizar  $f(x)$  são como escolher e calcular o  $q$  aproximação(definido no atual ponto  $x$ ), como escolher e modificar a confiança região  $N$ , e como exatamente para resolver o subproblema "trust-region".

O algoritmo 'trust-region-reflective' exige que se forneça um gradiente, e permite que apenas limites ou restrições de igualdade lineares, mas não ambos. Dentro desses limites, o algoritmo lida com ambos os grandes problemas esparsos e pequenos problemas densas eficiente. É um algoritmo de grande escala.

O algoritmo 'active-set' permite passos de iterações maiores, o que aumenta a velocidade de convergência. O algoritmo é eficaz em alguns problemas com restrições não-suaves.

Na otimização restrita, o objetivo geral é o de transformar o problema num subproblema de resolução mais fácil que pode, então, ser resolvidos e utilizados como a base de um processo iterativo. O problema é resolvido utilizando constrangida uma sequência de otimizações sem restrições parametrizadas, que no limite (da sequência) convergem para o problema confinado. Estes métodos são agora considerados relativamente ineficientes e foram substituídos por métodos que se concentraram na solução das equações *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT). As equações KKT são condições necessárias para otimização de um problema de otimização constrangidos. Se o problema é um assim chamado problema de programação convexa, isto é,  $f(x)$  e  $g_i(x), i = 1, \dots, M$ , são funções convexas, em seguida, as equações KKT são ambas necessárias e suficientes para um ponto de solução global. As equações de *Kuhn-Tucker* pode ser declarado como:

$$\Delta f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \Delta G_i(x^*) = 0 \quad (4.53)$$

$$\lambda_i \cdot G_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, m_e \quad (4.54)$$

$$\lambda_i \geq 0, i = m_e + 1, \dots, m, \quad (4.55)$$

A primeira equação descreve um cancelamento de gradientes entre a função objetivo e as restrições ativas no ponto de solução. Para os gradientes de ser cancelada, multiplicadores de Lagrange ( $\lambda_i, i = 1, \dots, m$ ) são necessários para equilibrar os desvios na magnitude da função de restrição

e gradientes objetivos. Porque apenas constrangimentos ativos estão incluídos nesta operação de cancelamento, limitações que não são ativos não devem ser incluídas nesta operação e assim são dadas multiplicadores de Lagrange igual a 0. Isto é afirmado implicitamente nas duas últimas equações de *Kuhn-Tucker*. A solução das equações KKT constitui a base de muitos algoritmos de programação não lineares. Estes algoritmos tentam calcular os multiplicadores de Lagrange diretamente. Métodos quase-Newton constrangidos garantir a convergência super-linear acumulando informações de segunda ordem sobre as equações KKT usando um procedimento de atualização quasi-Newton. Estes métodos são comumente referidos Programação Quadrática (SQP) métodos como sequenciais, uma vez que um subproblema QP é resolvido a cada iteração principal (também conhecido como programação iterativo quadrática, programação recursiva quadrática, e restrita métodos métricas variável). É um algoritmo de grande escala.

Por fim temos o algoritmo de otimização SQP. O algoritmo "SQP" é semelhante ao algoritmo "active-set". Métodos SQP representam o estado da arte em métodos de programação não-linear. Em cada iteração importante, uma aproximação é feita do Hessiano da função de Lagrange usando um método de atualização *quasi-Newton*. Este é então utilizado para gerar um subproblema QP cuja solução é utilizada para formar um sentido de pesquisa para um processo de busca de linha. Não é um algoritmo de larga escala.

A ideia principal é a formulação de um subproblema QP baseado em uma aproximação quadrática da função de Lagrange.

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(x) \quad (4.56)$$

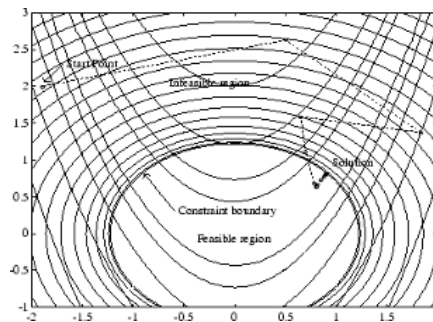


Figura 4.8: Algoritmo SQP da função Rosenbrock com restrição, retirado de [7]

Todos estes algoritmos são possíveis de ser implementados na função **fmincon**. A mesma é definida de seguida:

$$\min_x f(x) \text{ tal que } \begin{cases} c(x) \leq 0 \\ ceq(x) = 0 \\ A.x \leq b \\ Aeq.x = beq \\ lb \leq x \leq ub \end{cases} \quad (4.57)$$

$$[x, fval] = \text{fmincon}(\text{problem}) \quad (4.58)$$

$$[x, fval] = \text{fmincon}(\text{fun}, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub, \text{nonlcon}, \text{options}) \quad (4.59)$$

A *fmincon* é um método baseado em gradiente que é projetado para trabalhar em problemas onde as funções objetivo e restrições são tanto contínuas e têm primeiras derivadas contínuas. Quando o problema é inviável, *fmincon* tenta minimizar o valor máximo de restrição.

## 4.4 Modelos de transformadores com Parâmetros concentrados

O objetivo deste subcapítulo é utilizar os modelos de transformadores com parâmetros concentrados ([35]) para permitir a simulação numérica dos transformadores projetados. Na sua essência este tipo de modelo assenta na consideração da indutância de magnetização e de fugas. Além disso as perdas elétricas são modeladas pela inclusão de resistências.

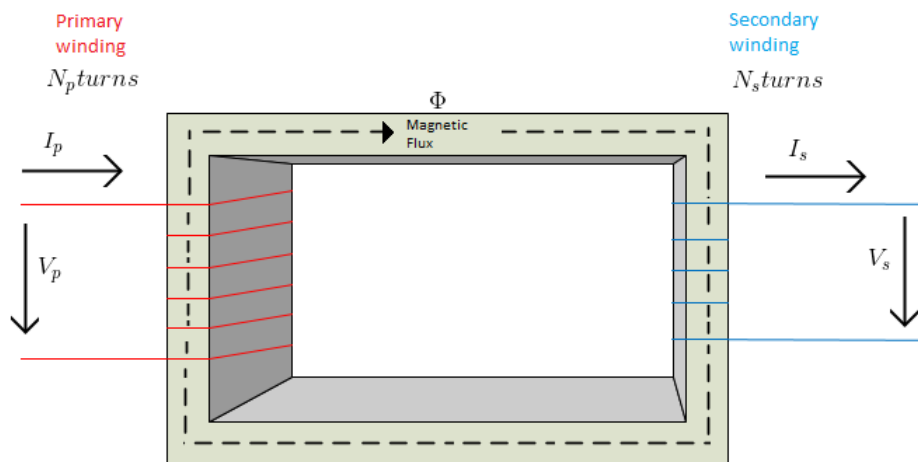


Figura 4.9: Modelo de um transformador real

As  $n_1$  espiras do enrolamento primário são percorridas por uma corrente  $i_1$ , enquanto que as espiras do enrolamento secundário  $n_2$  transportam uma corrente  $i_2$  (figura 4.9). Os enrolamentos

primário e secundário estabelecem através da razão entre o número de espiras de cada um, as tensões nominais primárias e secundárias do transformador.

O fluxo total no transformador engloba ambos os enrolamentos. Além disso, o entre-ferro é considerado como sendo infinitamente pequeno, nesta fase.

O material magnético do transformador assumiu-se ser de permeabilidade infinita, nesta fase, o que significa que a relutância  $R_m$  do circuito magnético é, de facto, zero.

A MMF dos dois enrolamentos pode ser escrita como:

$$MMF_{coil_1} = +n_1 i_1 \quad (4.60)$$

$$MMF_{coil_2} = -n_2 i_2 \quad (4.61)$$

As MMF's dos dois enrolamentos são propositadamente escolhido para ser dado em oposição que é a direção da corrente "natural" tal como se tornará aparente em breve. A MMF bobina resultante "vista" pelo circuito magnético tem de ser zero. Logo vemos que:

$$+n_1 i_1 - n_2 i_2 = 0 \quad (4.62)$$

$$i_1 = \frac{n_2}{n_1} i_2 \quad (4.63)$$

A segunda equação básica que existe para o transformador ideal relaciona os valores dos fluxos magnéticos totalizados, encadeados com cada enrolamento, com os fluxos médios por espira. Se partirmos do princípio, por exemplo, que uma fonte de tensão está ligada ao primário, em seguida, um fluxo total encadeado  $\psi_1$  estará presente.

Isto por sua vez significa que o circuito de fluxo  $\phi_m$  será igual a  $\phi_m = \frac{\psi_1}{n_1}$ . O fluxo correspondente ligado ao secundário é, dado por  $\psi_2 = \phi_m n_2$ . A relação entre os valores de fluxo de ligação primários e secundários podem, pois ser escritos como:

$$\psi_2 = \frac{n_2}{n_1} \psi_1 \quad (4.64)$$

As equações de tensão para o primário e secundário são:

$$u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} \quad (4.65)$$

$$u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} \quad (4.66)$$



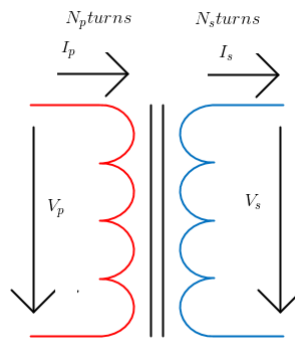


Figura 4.10: Representação esquemática de um transformador com enrolamento primário e secundário

Como vemos na figura 4.10, podemos caracterizar simplesmente um transformador com enrolamentos no primário e secundário, e com as respectivas tensões e correntes a circularrem, caso seja alimentado o primário, e o secundário tenha uma carga.

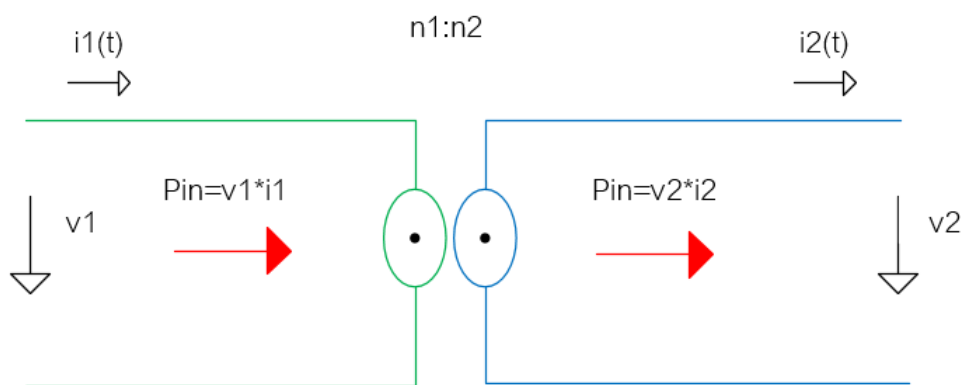


Figura 4.11: Modelo de transformador ideal

Na figura 4.11, vemos o modelo de transformador ideal, ou em inglês *Ideal Transformer Model* (ITF)[35], representado com as respectivas potências a circularrem no sentido indicado, do primário para o secundário.

#### 4.4.1 Modelo de transformador básico

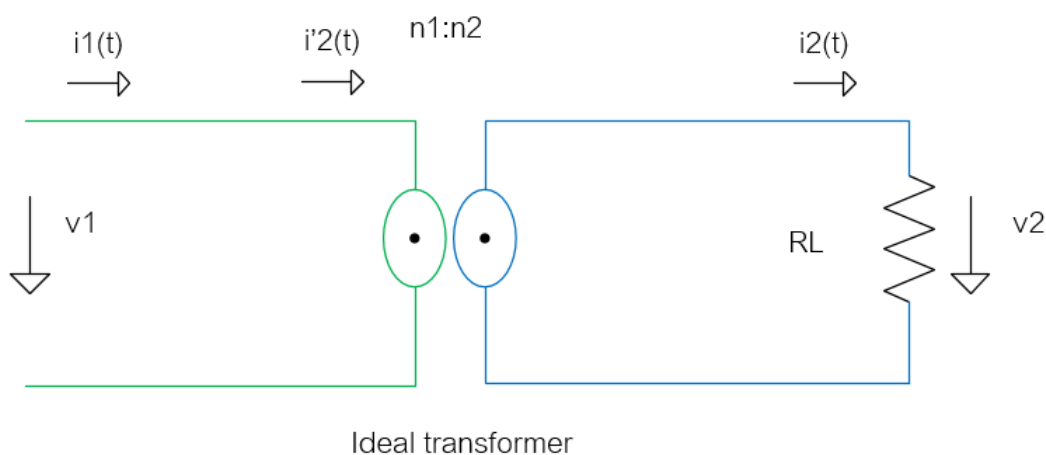


Figura 4.12: Modelo de transformador básico

O primeiro modelo estudado é o modelo do transformador básico visto na figura 4.12.

A corrente do modelo ITF no lado primário é  $i'_2$  e é conhecida como a corrente do secundário referida ao primário. É a corrente que é "vista" no lado do primário, devido a  $i_2$  atual no lado secundário.

A aplicação de uma tensão alternada no primário, origina uma corrente no primário. Essa corrente provocará um campo magnético cujo fluxo encadeia os dois enrolamentos e neles gerará uma força eletromotriz de indução. Teremos assim uma tensão no secundário e uma corrente, caso o circuito esteja fechado por uma carga.

O diferencial de tempo do fluxo de ligação do secundário representa a tensão do secundário que irá causar um  $i_2$  corrente na carga. A corrente secundária conduz uma MMF igual a  $i_2 n_2$  no secundário que deve ser contraposta através de uma MMF de  $i_1 n_1$  no lado primário dado que a relutância magnética do transformador é considerada como sendo zero.

#### 4.4.2 Modelo de transformador com indutância de magnetização

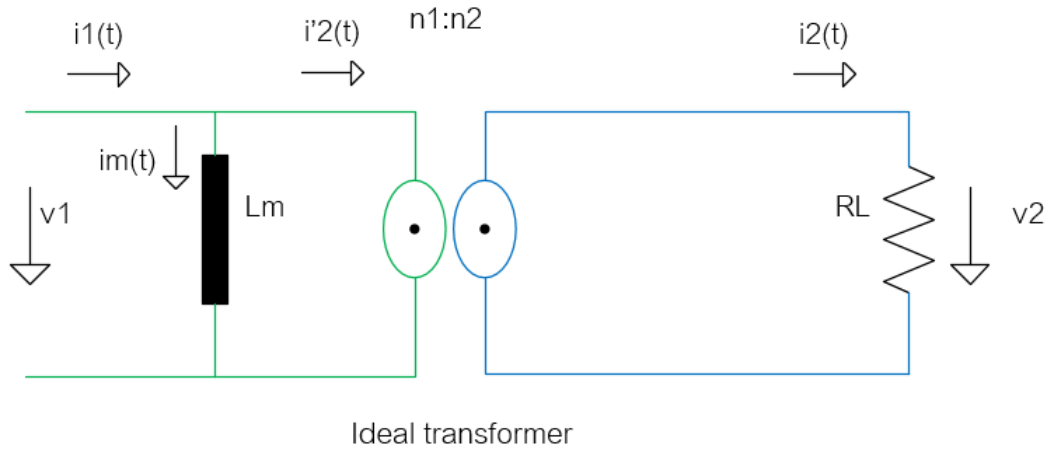


Figura 4.13: Modelo de transformador com indutância de magnetização

O transformador da figura 4.13 tem um entre-ferro entre os enrolamentos primário e secundário. O fluxo  $\phi_m$  precisa agora de atravessar este entre-ferro duas vezes. No nosso caso, foi escolhido o lado primário para excitação com uma fonte de tensão, enquanto o lado secundário está ligado a, por exemplo, uma carga resistiva. A corrente  $i_m$  é conhecida como a corrente de magnetização, que está diretamente ligada com o valor de fluxo total  $\psi_1$  primário e da indutância de magnetização  $L_m$ .

$$i_m = \frac{\psi_1}{L_m} \quad (4.67)$$

A indutância de magnetização está diretamente relacionada com a relutância magnética ( $R_m$ ) já que:

$$L_m = \frac{n_1^2}{R_m} \quad (4.68)$$

Reescrevendo as equações para este sistema temos que:

$$+n_1 i_1 - n_2 i_2 = n_1 i_m \quad (4.69)$$

#### 4.4.3 Transformador com três indutâncias

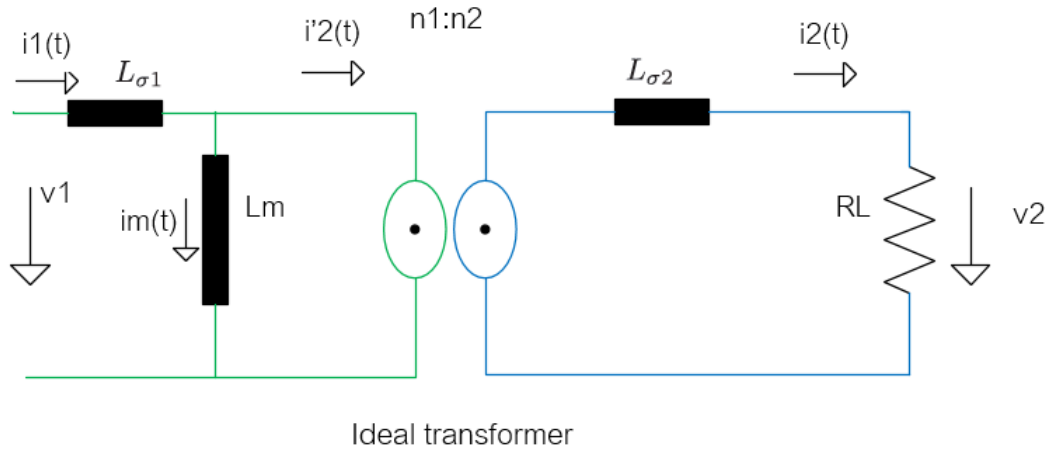


Figura 4.14: Modelo de transformador com três indutâncias

É habitual no estudo das máquinas elétricas a decomposição dos fluxos, isto é, separar o fluxo útil ou comum ( $\psi_m$ ) dos fluxos de fugas  $\psi_{\sigma 1}$  e  $\psi_{\sigma 2}$  (figura 4.14).

Os fluxos totalizados através do primário e do secundário podem escrever-se:

$$L_{\sigma 1} = \frac{\psi_{\sigma 1}}{i_1} \quad (4.70)$$

$$L_{\sigma 2} = \frac{\psi_{\sigma 2}}{i_2} \quad (4.71)$$

$$\psi_1 = \psi_m + \psi_{\sigma 1} \quad (4.72)$$

$$\psi_2 = \psi'_m + \psi_{\sigma 2} \quad (4.73)$$

$$\psi'_m = n_2 \phi_m \quad (4.74)$$

$$\psi_m = n_1 \phi_m \quad (4.75)$$

O modelo não é adequado para simular a situação sem carga (circuito aberto), ou seja, o enrolamento secundário em circuito aberto, uma vez que a corrente  $i_2$  é uma saída e, portanto, precisa de um percurso para se fechar o circuito.

O modelo de três indutâncias do transformador pode ser simplificado, no que respeita à modelação do transformador, dado que o seu comportamento pode ser perfeitamente caracterizado

por um modelo de duas indutâncias equivalentes, desde que se garanta que a impedância vista do primário seja equivalente.

O fator de acoplamento  $k$  é definido por:

$$k = \sqrt{1 - \frac{L_{\text{curto-circuito}}}{L_{\text{circuito-aberto}}}} \quad (4.76)$$

$L_{\text{circuito-aberto}}$  (a indutância do primeiro enrolamento enquanto o segundo enrolamento está aberto) e  $L_{\text{curto-circuito}}$  (a indutância do primeiro enrolamento enquanto o segundo enrolamento está curto-circuitado). A indutância de curto-circuito e de circuito aberto vai ser diferente quando o transformador é visto do lado primário ou secundário, no entanto, o fator  $k$  de acoplamento será o mesmo.

#### 4.4.4 Modelo de transformador referido ao primário

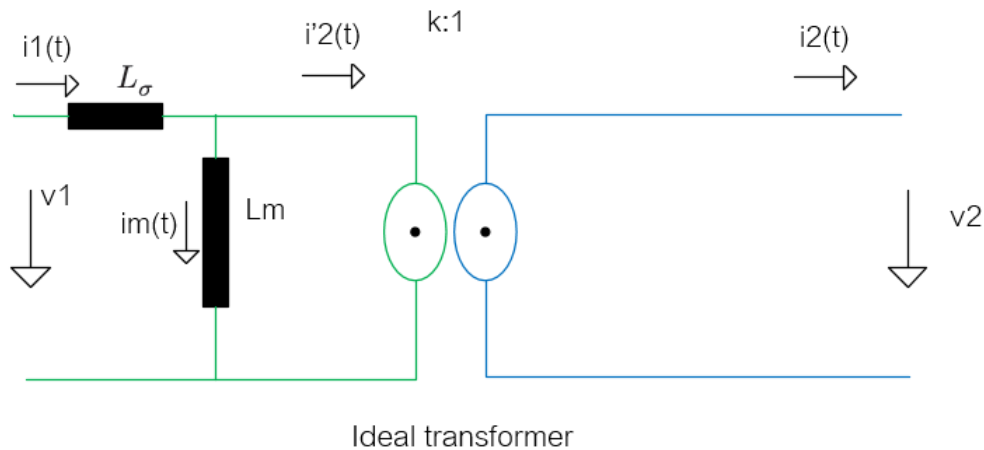


Figura 4.15: Modelo de transformador referido ao primário

No modelo de transformador referido ao primário as duas indutâncias estão localizados no lado do primário do transformador (figura 4.15).

#### 4.4.5 Modelo de transformador referido ao primário alternativo

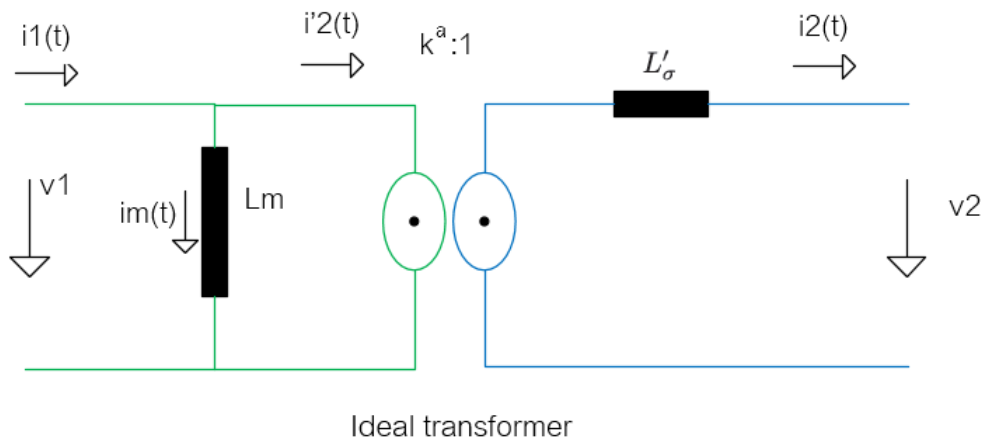


Figura 4.16: Modelo de transformador referido ao primário (modelo alternativo)

Caso a excitação seja fornecida pelo lado do secundário temos o modelo alternativo (figura 4.16).

#### 4.4.6 Modelo de transformador com duas indutâncias e resistência de bobina

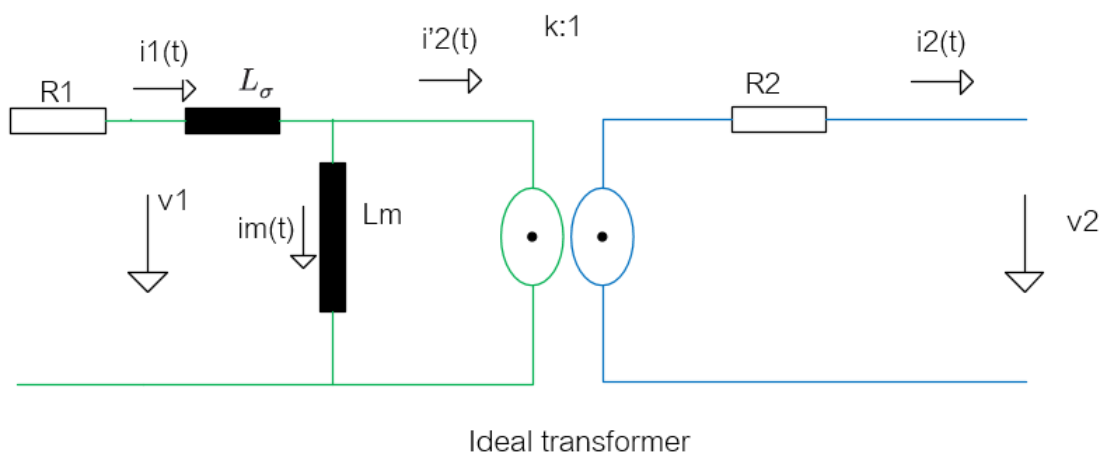


Figura 4.17: Modelo de transformador com duas indutâncias e resistência de bobina

Este modelo (figura 4.17) é uma extensão feita em relação ao modelo referido ao primário e refere-se à introdução das resistências dos enrolamentos primário e secundário, seja  $R_1$  e  $R_2$  respetivamente .

#### 4.4.7 Modelo de transformador com indutância mútua

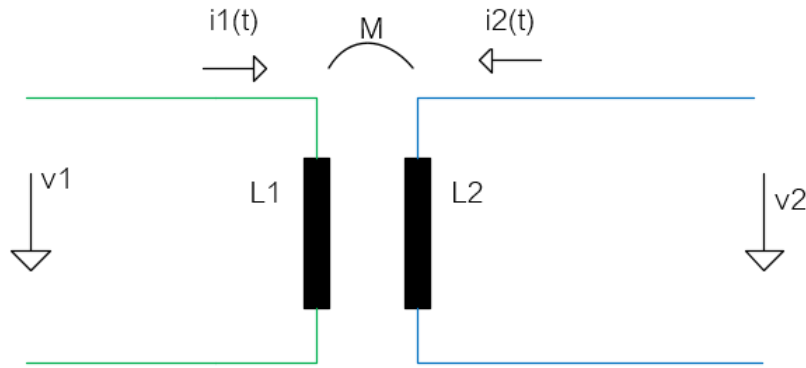


Figura 4.18: Modelo de transformador com indutância mútua

Um modelo frequentemente usado no campo das comunicações é o modelo de auto-indutância mútua (figura 4.18). As direção da corrente, neste caso, são para o interior, como é habitual para esta configuração.

Estes modelos são baseados nos coeficientes de auto-indução de cada um dos enrolamentos e no coeficiente de indução mútua. O acoplamento magnético entre os enrolamentos primário e secundário é definida em termos de um coeficiente de indutância mutua. A indutância mútua pode ser definido a partir de qualquer lado primário ou secundário .

A partir do lado primário é definido como a razão entre o fluxo totalizado no enrolamento secundário e corrente no lado primário , ou seja,  $M = \frac{\Psi_2}{i_1}$  com a condição  $i_2 = 0$ . O acoplamento mútuo também pode ser definida como a razão entre o fluxo totalizado pelo enrolamento do primário e a corrente secundária, ou seja,  $M = \frac{\Psi_1}{i_2}$  com a condição  $i_1 = 0$ . O valor de indutância mútua real permanece inalterado visto de lado primário ou secundário. Como tal, a indutância mútua também é um parâmetro independente ( $L_1, L_2$ ). Com esta decomposição as expressões gerais do transformador ficam no seguinte formato:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (4.77)$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (4.78)$$

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad (4.79)$$

## 4.5 Arquitetura da ferramenta de projeto

Para desenvolver o sistema foi usado o software *Matlab*, com auxílio da ferramenta *Guide* para construção de interfaces e da ferramenta *Simulink* que é usada para a simulação dinâmica dos modelos matemáticos do transformador.

Na figura 4.19 encontra-se representado de forma esquemática os principais componentes de arquitetura do programa desenvolvido.

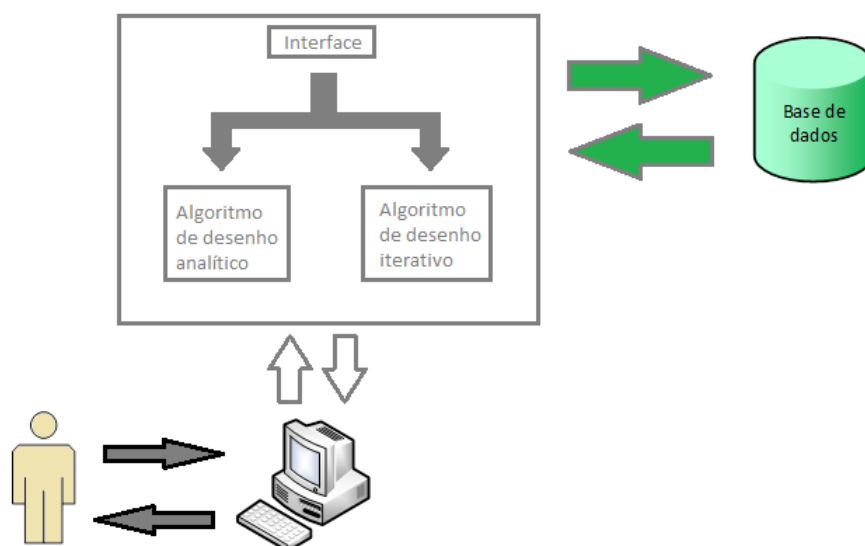


Figura 4.19: Diagrama da interface desenvolvida

A interface(figura 4.19) está responsável por receber as especificações do utilizador e, consoante a escolha de algoritmos de desenho, vai receber as características do transformador calculado num ou noutro algoritmo. A interface é bastante interativa e de fácil uso, sendo que a seguir serão apresentadas alguns detalhes adicionais dos diferentes componentes que integram a ferramenta desenvolvida.



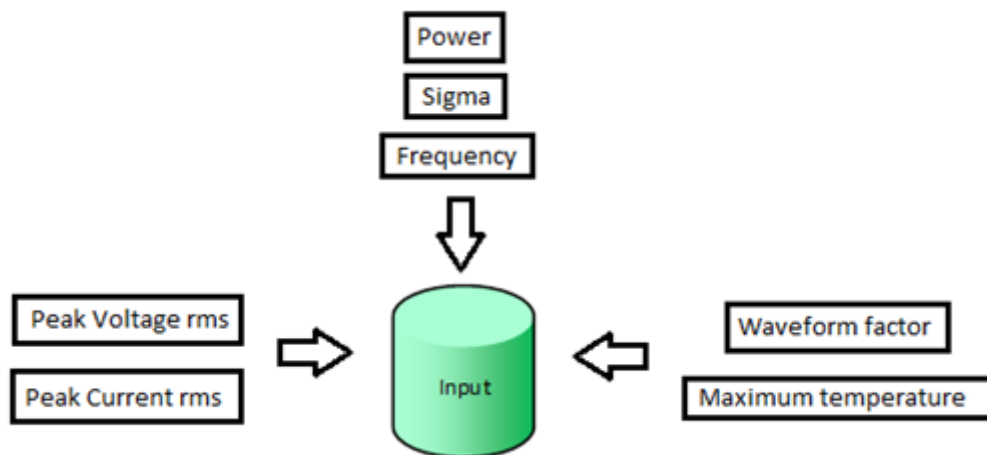


Figura 4.20: Diagrama da interface Input desenvolvida

Na figura 4.20 encontram-se identificados os principais parâmetros de entrada para o projeto do transformador (fator de forma de onda, frequência, etc...).

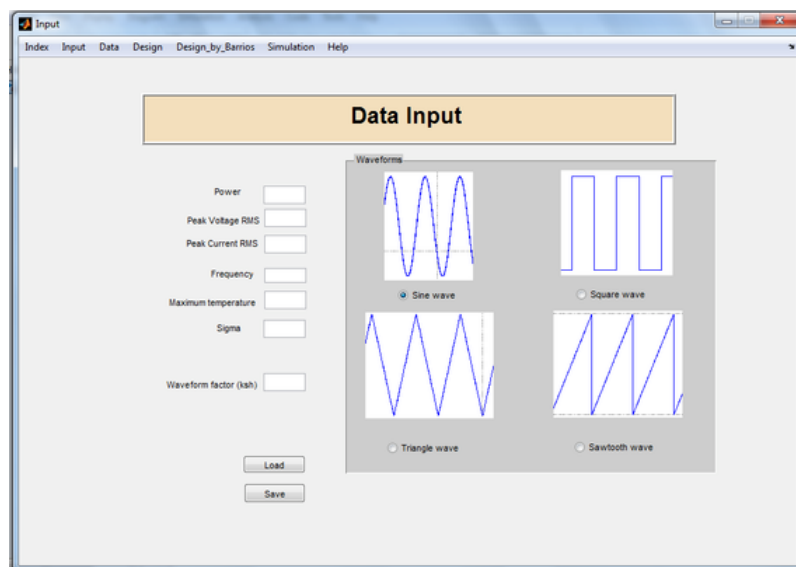


Figura 4.21: Interface "Transformer data input"

A título ilustrativo a figura 4.21 mostra a janela de entrada de dados. Permite ao utilizador escrever as especificações mais gerais do projeto de transformador desejado. Potência, correntes e tensões rms, assim como fator de onda podem ser descritos nesta página. É possível ao utilizador guardar os dados em ficheiro, ou carregar dados previamente guardados (figura 4.19).

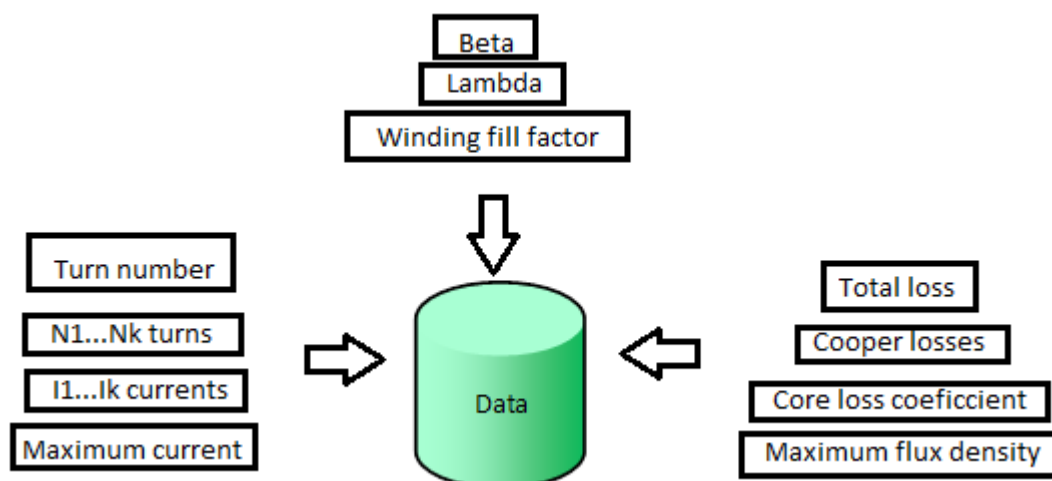


Figura 4.22: Diagrama da interface Data desenvolvida

Na figura 4.22 encontram-se identificados os principais dados para o projeto do transformador (perdas totais, fator de enchimento, etc...).

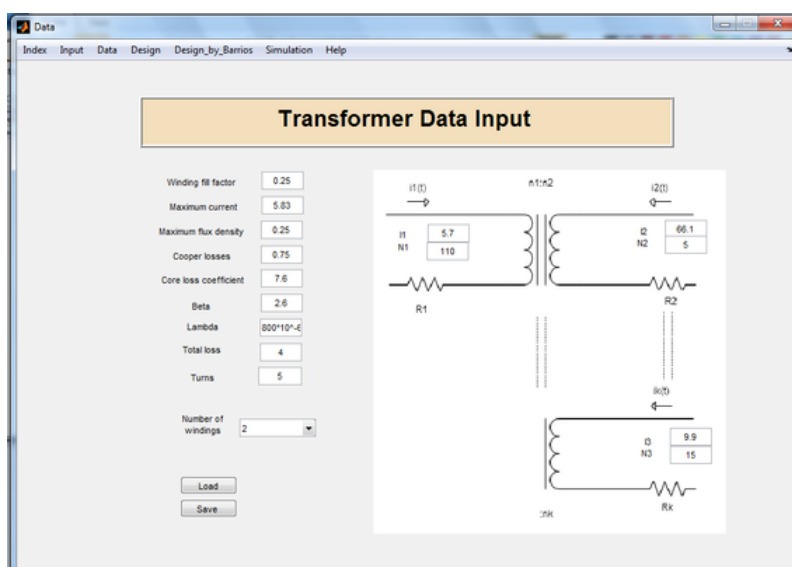


Figura 4.23: Interface "Data Input"

Outros dados importantes para serem guardados, tal como correntes, os fatores de enchimento de enrolamento e densidade de fluxo máxima, serão guardados numa base de dados chamada "Data"(figura 4.23).

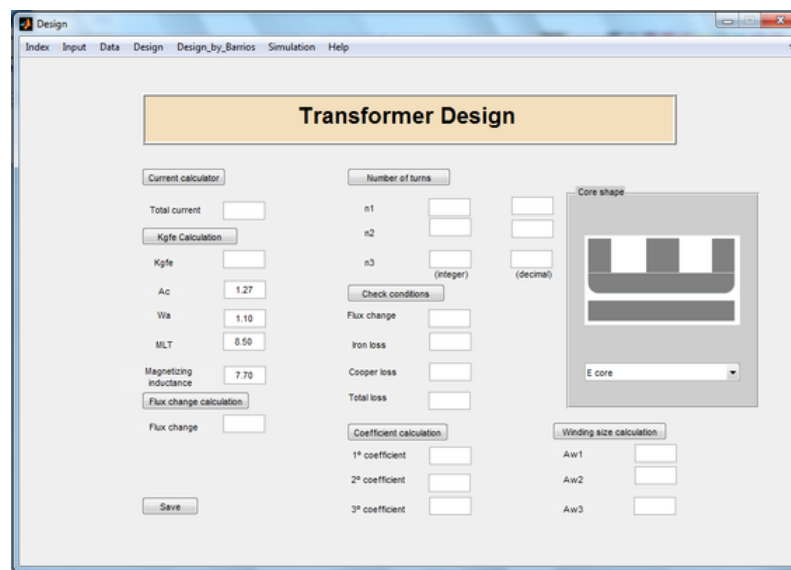


Figura 4.24: Interface "Design"

Na figura 4.24 podemos ver a interface "Design", que permite ao utilizador usar o método  $K_{gfe}$  para desenhar transformadores, sendo permitido ao utilizador guardar os dados.

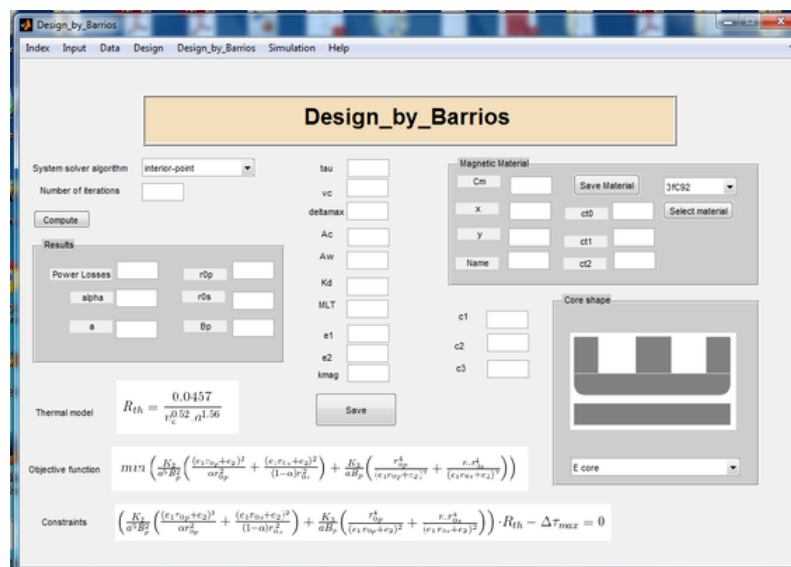


Figura 4.25: Interface "Design by Barrios"

A janela de entrada de dados para o algoritmo analítico encontra-se na figura 4.25. Neste caso o utilizador pode criar e usar uma base de dados de materiais magnéticos, assim como escolher o algoritmo de otimização computacional para correr o algoritmo de desenho de transformadores analítico desenvolvido.

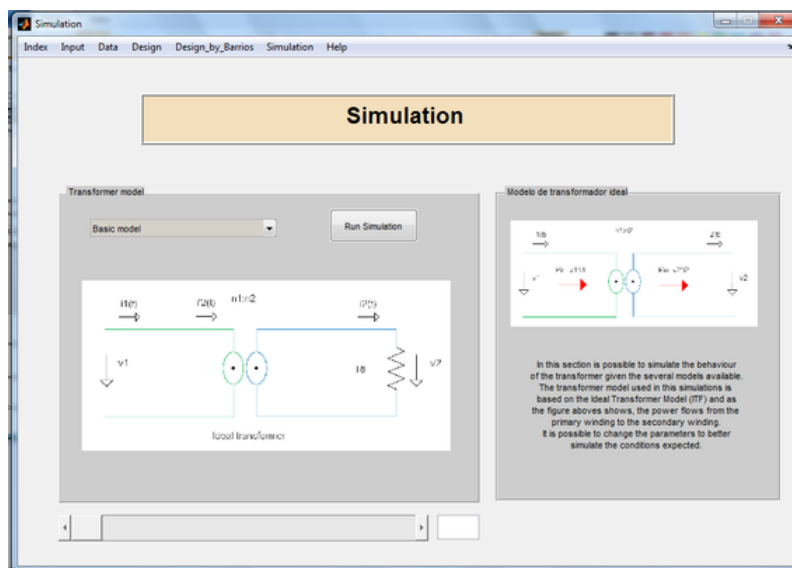
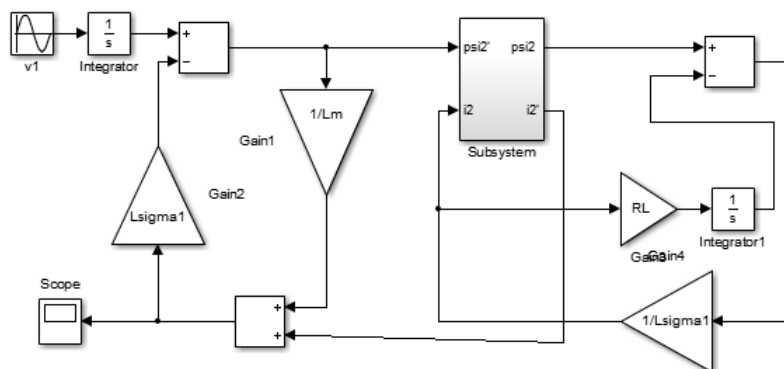


Figura 4.26: Interface "Simulation"

Figura 4.27: Diagrama *simulink* funcional, modelo de três indutâncias

Após o projeto do transformador e através de uma estimativa dos parâmetros concentrados do modelo de transformador é possível escolher o *Simulink* para simular o funcionamento do transformador e assim antever o seu desempenho inserido num circuito eletrónico de potência (figuras 4.26 e 4.27).

## Capítulo 5

# Resultados

Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos com a ferramenta desenvolvida para três casos de estudo 5.1 considerados bem como os resultados atingidos 5.2.

### 5.1 Casos de estudo

Os casos de estudo foram inspirados nas referências [22][8] como forma de corroborar os resultados obtidos com a ferramenta desenvolvida.

### 5.2 Resultados com ferramenta desenvolvida

#### 5.2.1 Conversor Cuk

Na figura 5.1 podemos ver a topologia do conversor *Cuk* considerado:

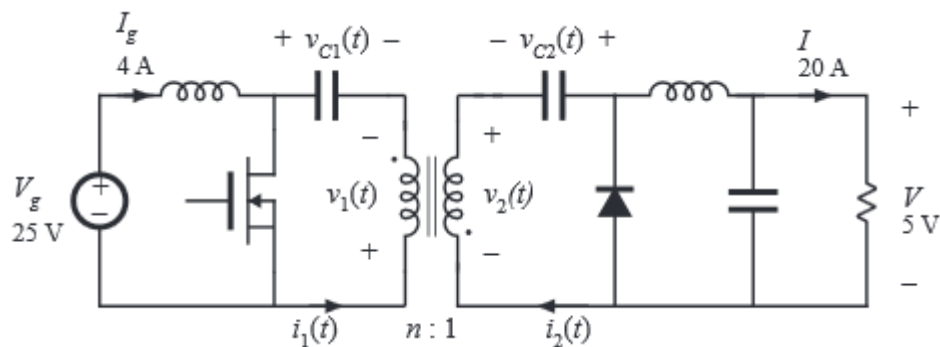


Figura 5.1: Conversor *Cuk*, retirado de [8]

Com as seguintes características importantes para o desenho de transformador:

Tabela 5.1: Características para desenho de transformador para conversor *Cuk*

Variável	Valor
D	0.5
$K_u$	0.5
n	5
$f_s$	200 kHz
Potência total máxima	0.25 W
$K_{fe}$	24.7
$\beta$	2.6
$\lambda_1$	62.5 V-sec
I1	4 A
I2	20 A
$I_{TOT}$	8 A

Os resultados obtidos na ferramenta foram:

Tabela 5.2: Resultados para desenho de transformador para conversor *Cuk*, com algoritmo iterativo

Variável	Valor
$k_{gfe}$	0.00295
$\Delta B$	0.0858 Tesla
n1	5 espiras
n2	1 espiras
$\alpha_1$	0.5 A
$\alpha_2$	0.5 A
$A_{w1}$	$14.8 * 10^{-3} cm^2$
$A_{w2}$	$74.2 * 10^{-3} cm^2$

Com o núcleo a ser escolhido da *Magnetics Inc.* com núcleo "pot core"2213.

Tabela 5.3: Resultados para desenho de transformador para conversor *Cuk*, com algoritmo analítico

Variável	Valor
a	0.034 mm
$B_p$	0.068 Tesla
$r_{0p}$	0.0158 mm
$r_{0s}$	0.0191 mm
$\alpha$	0.2141
$P_{tot}$	0.4239 W

Os resultados do algoritmo são bastante variáveis consoante o número de iterações escolhidos para correr a função *fmincon*. Por forma a confrontar os dois métodos só foi selecionado núcleo usado no primeiro método. Os resultados mostram uma diferença não muito grande entre os dois métodos, no que respeita às dimensões dos enrolamentos, variáveis de projeto e fatores dimensionais de cada método.

### 5.2.2 Conversor Foward

O próximo caso de estudo é baseado num conversor do tipo *Buck* de ponte completa com as seguintes características:

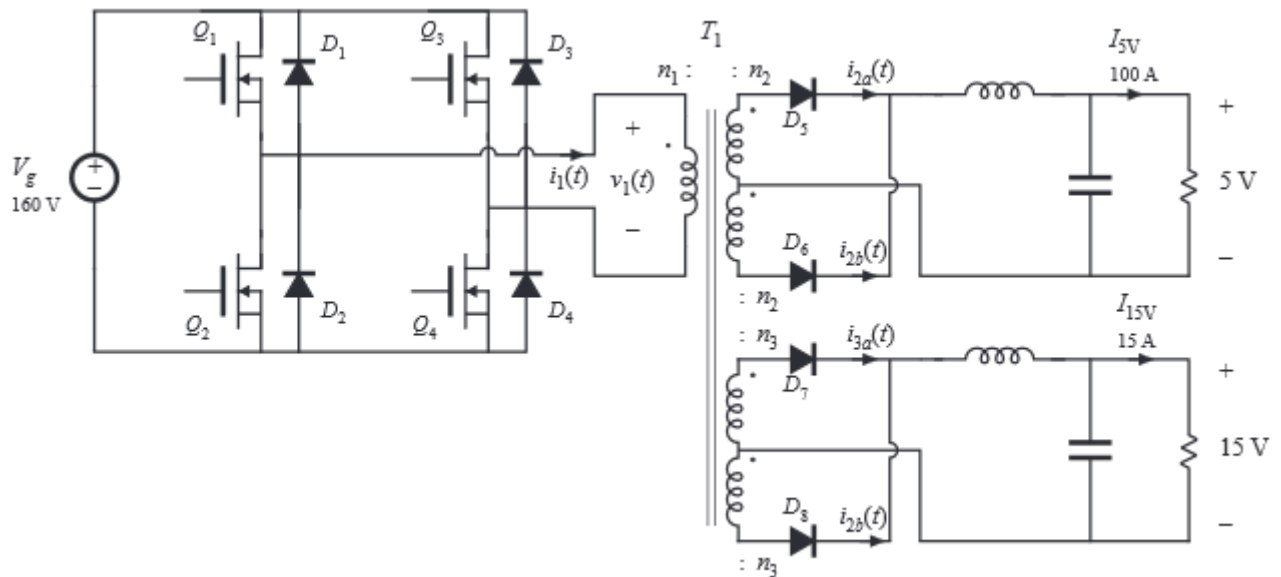


Figura 5.2: Conversor *Buck* com ponte completa, retirado de [8]

Com as seguintes características importantes para o desenho de transformador:

Tabela 5.4: Características para desenho de transformador para conversor *Buck*

Variável	Valor
D	0.75
$K_u$	0.25
n	110:5:15
$f_s$	150 kHz
Potência total máxima	4 W
$K_{fe}$	$7.6 \text{ W/T}^B \text{ cm}^3$
$\beta$	2.6
$\lambda_1$	800 V- $\mu\text{sec}$
I1	5.7 A
I2	66.1 A
I3	9.9 A
$I_{TOT}$	14.4 A

Os resultados obtidos na ferramenta foram:

Tabela 5.5: Resultados para desenho de transformador para conversor *Buck*, com algoritmo iterativo

Variável	Valor
$k_{gfe}$	0.00937
$\Delta B$	0.08 Tesla
n1	22 espiras
n2	1 espiras
n3	3 espiras
$\alpha_1$	0.396 A
$\alpha_2$	0.209 A
$\alpha_3$	0.094 A
$A_{w1}$	$8 * 10^{-3} cm^2$
$A_{w2}$	$93.0 * 10^{-3} cm^2$
$A_{w3}$	$13.9 * 10^{-3} cm^2$

Com o núcleo a ser escolhido da *Magnetics Inc.* em duplo E 50(EE50).

Estes resultados foram validados com [8], demonstrando que o método iterativo implementado na ferramenta chega aos mesmos resultados.

### 5.2.3 Conversor flyback

Por forma a testar na prática foi projetado um conversor *flyback* [8]. Na figura 5.3 podemos ver o esquemático do conversor.

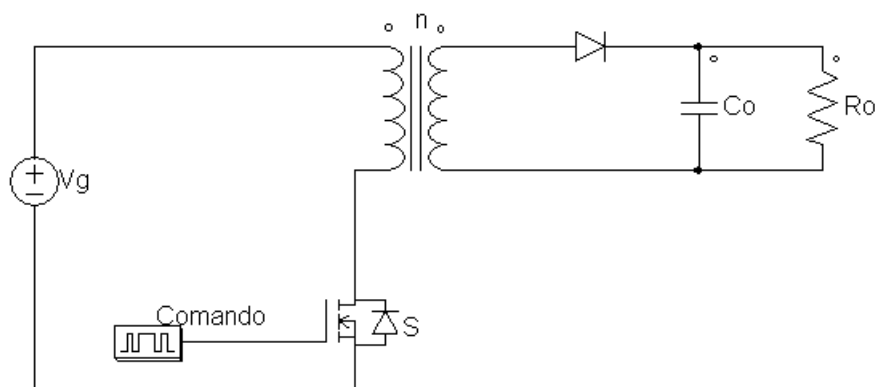


Figura 5.3: Conversor *Flyback*

$V_g$  representa a tensão de entrada que será 25 V,  $C_o$  representa o condensador de saída,  $R_o$  é a carga,  $S$  é o semicondutor usado (*mosfet* IRFP540 neste caso), e no que respeita à malha *snubber* temos um diodo rápido  $D_s$ , a resistência  $R_s$  e o condensador  $C_s$ . Temos ainda o diodo (BY220) da parte do secundário. O comando é uma onda quadrada de 25 kHz com *duty-cycle* de 50%. O comando é dado pelo NE555 e a drive do *mosfet* é o IR2110. Foi definido um coeficiente de



enchimento  $K_u$  de 0.4 e a razão de transformação,  $n$ , de 0.2, o que significa que temos 5 V no primário (para uma resistência de  $85 \Omega$ ).

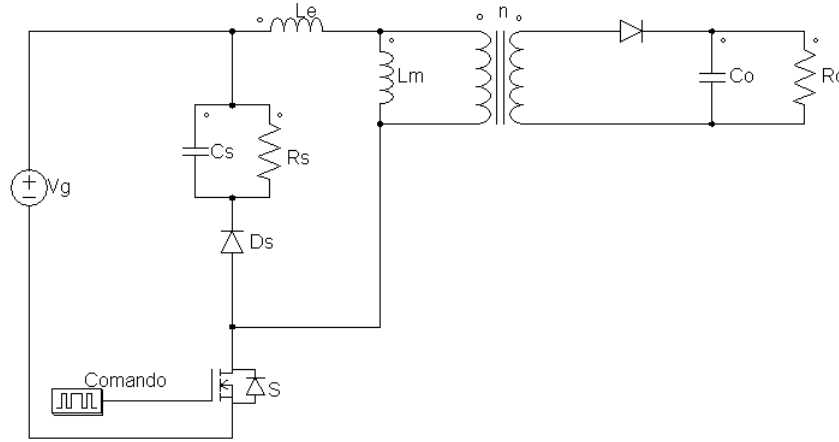


Figura 5.4: Conversor *Flyback* com malha snubber

Tendo em conta a corrente de magnetização foi projetada uma malha *snubber* para suprimir os efeitos da mesma. Podemos ver na figura 5.4 o conversor com malha *snubber*, onde  $C_s$  é o condensador,  $R_s$  a resistência e  $D_s$  é o diodo rápido da malha *snubber*.  $L_e$  simboliza a indutância de fugas e  $L_m$  a indutância de magnetização.

Usando o *Gecko Magnetics*[9] para simular o circuito e desenhar o transformador obtemos 72 espiras no primário e 14 espiras no secundário. Usando o algoritmo iterativo descrito no subcapítulo 4.2.1 chegamos a 70 espiras no primário e 13 no secundário.

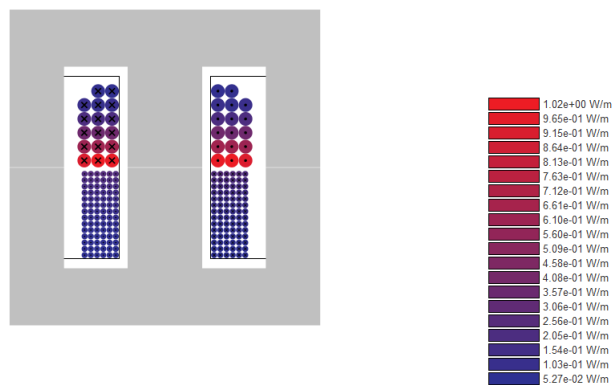


Figura 5.5: Perdas por enrolamentos, retirado de [9]

O software da *Gecko* também nos dá as perdas por enrolamentos como podemos ver na figura 5.5.

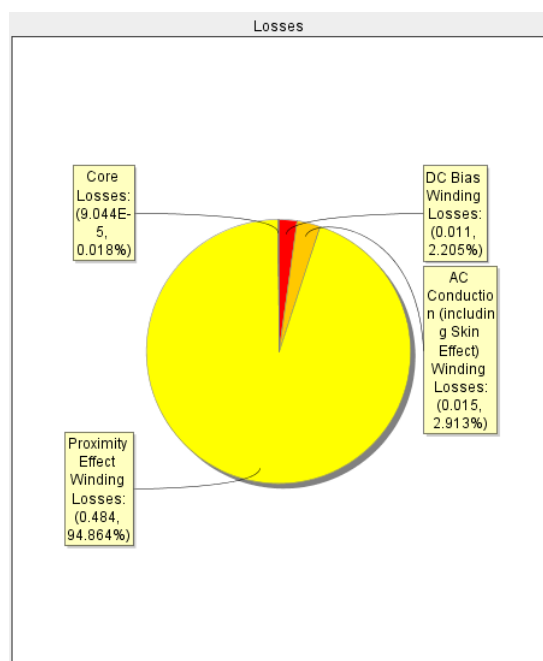


Figura 5.6: Perdas do conversor, retirado de [9]

De acordo com o software da *Gecko*[9] a temperatura dos enrolamentos chegará aos 44.89° Celsius enquanto que a temperatura do núcleo chegará aos 30.06° Celsius. Como podemos ver na figura 5.6 as perdas no núcleo são de  $9.045 \times 10^{-5}$  W enquanto que as perdas dos enrolamentos são de 0.51 W (em que 0.01 W são perdas DC, 0.01 W são perdas por efeito pelicular e 0.48W são perdas por proximidade). A diferença para o resultado do algoritmo iterativo implementado é baixa já que neste algoritmo tivemos como resultado perdas de núcleo de  $1.531 \times 10^{-4}$  W e perdas nos enrolamentos de  $1.252 \times 10^{-2}$  W.

O transformador (núcleo EE30) da figura 5.7 foi construído de acordo com os dados da ferramenta *Gecko Magnetics*.

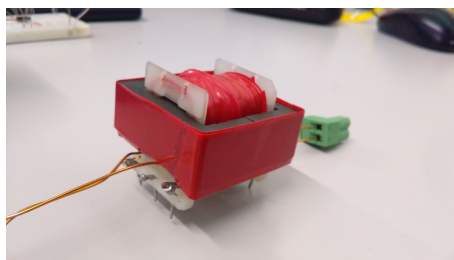


Figura 5.7: Transformador construído

Testando o circuito no laboratório chegamos às formas de onda da figura 5.8.

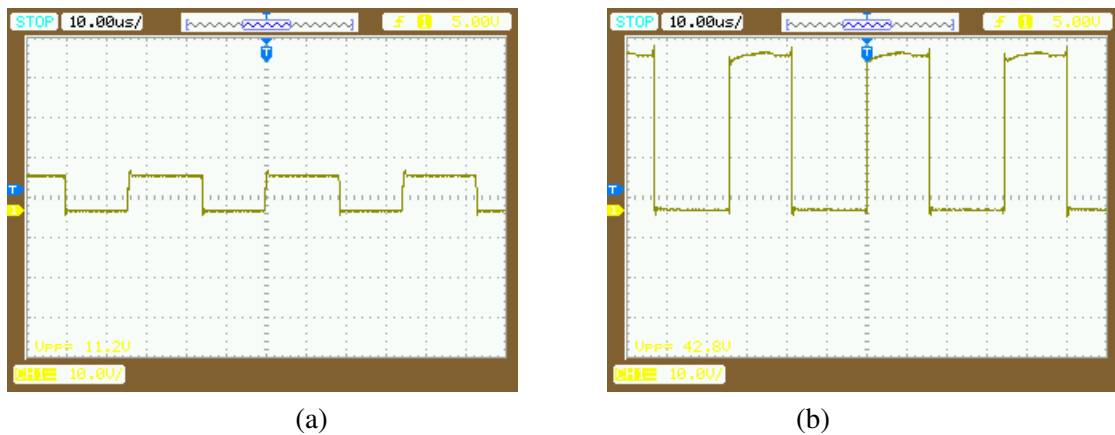


Figura 5.8: Comando do *mosfet* (a) e tensão nos terminais do mesmo (b).

Como podemos observar pela figura (a) o comando do *mosfet* está a ser realizado a 25kHz, sendo que este comuta a tensão de entrada do circuito, evidenciado pela figura (b).

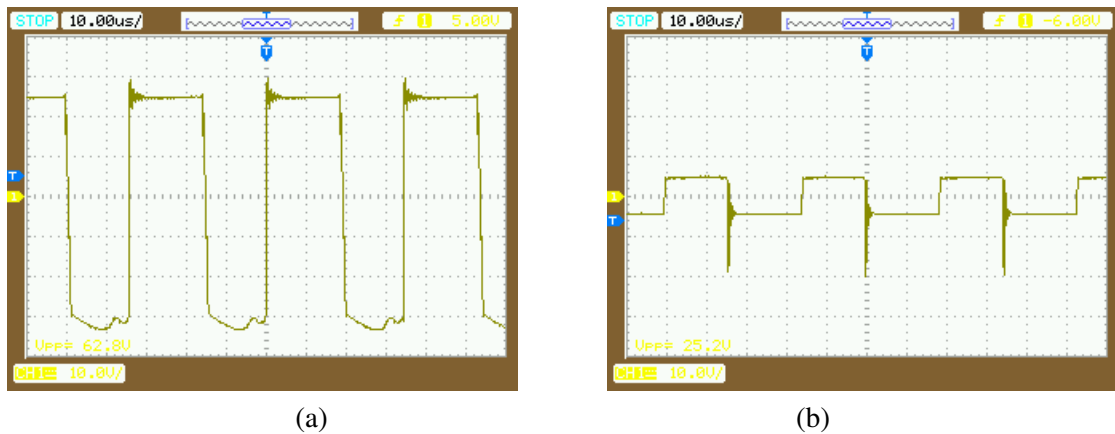


Figura 5.9: Tensão no primário (a) e no secundário (b).

Como podemos observar na figura 5.9, as formas de onda do primário e secundário mostram o abaixamento de tensão na razão pretendida, do primário para o secundário. No primário obtivemos uma tensão eficaz de 27.83 V enquanto no secundário a tensão foi de 6.45 V (medidas com um multímetro). Isto perfaz um rácio de 4.31 V. Este valor era esperado tendo em conta que o valor da razão de transformação calculados variava de 6.16 com o software da *Gecko* até 5.38 no algoritmo iterativo desenvolvido a partir de [8].

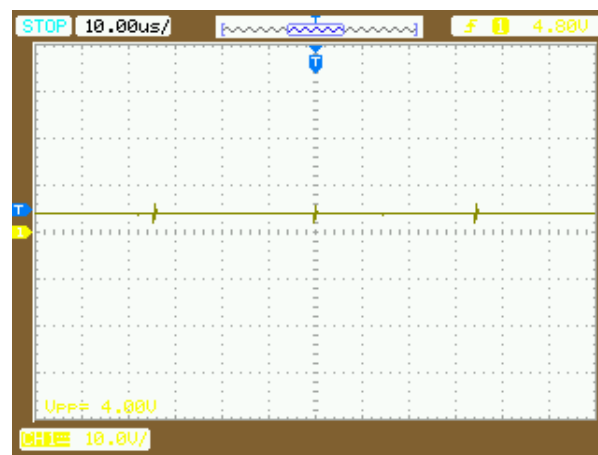


Figura 5.10: Tensão na carga

Por fim podemos ver na figura 5.10 a tensão na carga de  $85\Omega$ .

## Capítulo 6

# Conclusões e Trabalho Futuro

### 6.1 Introdução

Neste último capítulo são apresentadas as conclusões e sugestões de melhoramento.

### 6.2 Satisfação dos Objectivos

O objetivo central desta dissertação passava por fazer um estudo de modelos de transformadores para médias frequências bem como analisar métodos de desenho e implementar os mesmos. Ao longo desta dissertação houve a necessidade de adquirir conhecimento em diversas áreas relacionadas com o projeto de transformadores, sendo que esse trabalho de pesquisa e estudo está presente ao longo do documento. Começando na análise dos fenómenos elétricos e magnéticos do transformador estudados ao longo do capítulo 2, passando pela caracterização física do transformador (capítulo 3) onde são estudados os modelos de perdas dos enrolamentos e núcleo culminando na implementação de métodos de desenho de transformadores, bem como modelos de transformadores na ferramenta desenvolvida 4. Foi também posta em prática o desenho e construção de um transformador para um circuito de potência.

Tendo em conta que já existem várias ferramentas para desenho de transformadores no mercado, foi possível perceber que mesmo para a utilização de ferramentas comerciais avançadas, é necessário um conhecimento profundo dos assuntos relativos ao projeto do transformador, pelo que esta tese pode ser vista como uma introdução e aprofundamento para tirar proveito das ferramentas de trabalho desenvolvidas na dissertação.

### 6.3 Trabalho Futuro

Tendo em conta que muita da minha inspiração para fazer as funcionalidades implementadas na ferramenta veio da *GeckoMagnetics*, muito do trabalho futuro é baseado naquilo que eu acho possível e exequível de ser implementado num dado tempo. Tendo em conta que esta ferramenta comercial, *GeckoMagnetics*, foi também ela um projeto *Matlab* que passou a ferramenta comercial

através do redesenho da mesma em *Java* (linguagem de programação), algum do trabalho futuro passa também por fugir ao exclusivo do ambiente *Matlab*.

Relativamente a trabalho futuro, poderemos considerar:

- Melhoria da performance da ferramenta desenvolvida em MATLAB, usando para isso uma base de dados PostgreSQL ou MongoDB para assim se tornar mais fácil o armazenamento e manipulação de dados.
- Desenvolver opções para o algoritmo analítico (Design by Barrios) no que respeita há possibilidade de escolha de modelos de perdas no núcleo, nos enrolamentos e modelo térmico a considerar.
- Possibilidade de visualizar graficamente as perdas por enrolamentos do transformador.
- Testar ferramenta num caso real, usando conversor em malha fechada.

# Referências

- [1] Fundamentals of Power Electronics Instructor's slides. URL: <http://ecee.colorado.edu/copec/book/slides/slidedir.html>.
- [2] Wikimedia. Planar core, 2015. URL: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/59/Planar\\_core\\_assembly\\_exploded.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/59/Planar_core_assembly_exploded.png).
- [3] No Title. URL: [http://encyclopedia-magnetica.com/doku.php/thermal\\_resistance\\_of\\_ferrite\\_cores](http://encyclopedia-magnetica.com/doku.php/thermal_resistance_of_ferrite_cores).
- [4] H Feshki Farahani. Presentation of an Algorithm to Optimal Design of High Frequency Transformers. 1(12):2655–2662, 2011.
- [5] No Title. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange\\_multiplier](https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_multiplier).
- [6] No Title. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Karmarkar's\\_algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/Karmarkar's_algorithm).
- [7] Mathworks. No Title. URL: <http://www.mathworks.com/help/optim/ug/constrained-nonlinear-optimization-algorithms.html>.
- [8] Robert W. Erickson e Dragan Maksimovic. *Fundamentals of Power Electronics*. 2001. URL: [http://books.google.pt/books/about/Fundamentals\\_of\\_Power\\_Electronics.html?id=On9-rJTR8ygC&pgis=1](http://books.google.pt/books/about/Fundamentals_of_Power_Electronics.html?id=On9-rJTR8ygC&pgis=1).
- [9] GeckoMAGNETICS. URL: <http://www.gecko-simulations.com/geckomagnetics.html>.
- [10] Irma Villar, Unai Viscarret, Ion Etxeberria-Otadui, e Alfred Rufer. Global loss evaluation methods for nonsinusoidally fed medium-frequency power transformers. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(10):4132–4140, 2009. doi:10.1109/TIE.2009.2021174.
- [11] The Little Box Challenge, an open competition to build a smaller power inverter. URL: <https://www.littleboxchallenge.com/>.
- [12] Diogo Varajão, Luís M Miranda, e Rui E Araújo. Towards a new technological solution for Community Energy Storage Keywords 2 . Community Energy Storage. 2012.
- [13] Ferrite Cores, MPP Cores, Tape Wound Cores, Sendust Cores| Magnetics®. URL: <http://www.mag-inc.com/>.
- [14] Mark Lund, PowerStream Inc. e PowerStream Inc. Mark Lund. *American Wire Gauge table and AWG Electrical Current Load Limits*. URL: [http://www.powerstream.com/Wire\\_Size.htm](http://www.powerstream.com/Wire_Size.htm).

- [15] Douglas Brooks e Douglas Brooks. Fusing Current: When Traces Melt Without a Trace. *Printed Circuit Design*, 15(12), 1998.
- [16] QuickField support site. URL: <http://www.quickfield.com/>.
- [17] Finite Element Method Magnetics: HomePage. URL: <http://www.femm.info/wiki/HomePage>.
- [18] PowerEsim - Free SMPS Switching Power Supply / Transformer Design Software. URL: <http://www.poweresim.com/>.
- [19] Irma Villar. Multiphysical characterization of medium-frequency power electronic transformers. 4622:234, 2010. URL: [http://infoscience.epfl.ch/record/143044/files/EPFL\\_TH4622.pdf](http://infoscience.epfl.ch/record/143044/files/EPFL_TH4622.pdf).
- [20] Antonietta De Nardo, Giulia Di Capua, e Nicola Femia. Transformer design for isolated switching converters based on geometric form factors of magnetic cores. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 60(6):2158–2166, 2013. doi:10.1109/TIE.2012.2193853.
- [21] Jonas Mühlethaler, Jürgen Biela, Johann Walter Kolar, e Andreas Ecklebe. Improved core-loss calculation for magnetic components employed in power electronic systems. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 27(2):964–973, 2012. doi:10.1109/TPEL.2011.2162252.
- [22] High-frequency Power Transformers, Ernesto L Barrios, Student Member, Alfredo Ursúa, Luis Marroyo, Pablo Sanchis, e Senior Member. Analytical Design Methodology for Litz-Wired. 62(4):2103–2113, 2015.
- [23] Thiago C. Batista, Benedito a. Luciano, Raimundo C.S. Freire, Walman B. Castro, e Edcleide M. Araújo. Influence of magnetic permeability in phase error of current transformers with nanocrystalline alloys cores. *Journal of Alloys and Compounds*, 8388:S228–S230, 2013. URL: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0925838813028405>, doi:10.1016/j.jallcom.2013.11.110.
- [24] Mitushi Nigam e Charles R. Sullivan. Multi-layer folded high-frequency toroidal inductor windings. *Conference Proceedings - IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition - APEC*, páginas 682–688, 2008. doi:10.1109/APEC.2008.4522795.
- [25] C.R. Sullivan. Computationally efficient winding loss calculation with multiple windings, arbitrary waveforms, and two-dimensional or three-dimensional field geometry. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 16(1):142–150, 2001. doi:10.1109/63.903999.
- [26] Amir Baktash, Student Member, e Abolfazl Vahedi. Calculation of Parasitic Elements in Toroidal Core Transformers. 42(6):1690–1696, 2014.
- [27] Charles R. Sullivan. Optimal choice for number of strands in a litz-wire transformer winding. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 14(2):283–291, 1999. doi:10.1109/63.750181.
- [28] Shen Wang, Michael Andrew de Rooij, Willem Gerhardus Odendaal, Jacobus Daniel van Wyk, e Dushan Boroyevich. Reduction of high-frequency conduction losses using a planar litz structure. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 20(2):261–267, 2005. doi:10.1109/TPEL.2004.843022.



- [29] Uwe Drofenik. A 150kW Medium Frequency Transformer Optimized for Maximum Power Density. *Integrated Power Electronics Systems (CIPS)*, ... , 9(1):2–7, 2012. URL: [http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs\\_all.jsp?arnumber=6170640](http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=6170640).
- [30] Sujit Purushothaman e Francisco De León. Heat-transfer model for toroidal transformers. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 27(2):813–820, 2012. doi:10.1109/TPWRD.2012.2185956.
- [31] R J Herrnstein. On the law of effect1. *Journal of the experimental analysis of behavior*, 13:243–266, 1970. doi:10.1901/jeab.1970.13-243.
- [32] William Gerard Hurley, Werner Hugo Wölflé, e John G. Breslin. Optimized transformer design: Inclusive of high-frequency effects. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 13(4):651–659, 1998. doi:10.1109/63.704133.
- [33] a. Ayachit e M.K. Kazimierczuk. Thermal Effects on Inductor Winding Resistance at High Frequencies. *IEEE Magnetic Letters*, 4:1–4, 2013.
- [34] Huijuan Li. Lagrange Multipliers and their Applications. *Electrical Engineering*, (10), 2008. URL: [http://sces.phys.utk.edu/~moreo/mm08/method\\_HLi.pdf](http://sces.phys.utk.edu/~moreo/mm08/method_HLi.pdf).
- [35] Duco W J Pulle e Rik W De Doncker. *No Title*.